

> tels calculs. En fait, la «mère de l'algèbre moderne» était elle-même une calculatrice de premier plan, même si c'est sa démarche conceptuelle qui l'a rendue célèbre.

Au cours des huit années suivantes, Emmy continua à mûrir en tant que mathématicienne, en particulier sous l'influence du successeur de Gordan, Ernst Fischer. Elle put finalement échapper à son isolement des débuts de la Première Guerre mondiale, quand les salles de cours de l'université se vidaient et que les tranchées se remplissaient. Au département de mathématiques de l'université de Göttingen, Hilbert et Klein étaient en effet continuellement à la recherche de nouveaux talents, et ils invitèrent ainsi Emmy Noether à venir les rejoindre au printemps de 1915.

Cette offre vint probablement avec l'assurance que la faculté de philosophie de Göttingen soutiendrait ensuite sa candidature pour son *Habilitation*, qualification nécessaire pour enseigner. Mais même l'appui de personnalités aussi influentes que Klein et Hilbert ne put garantir cette issue: cela ne vint qu'après la guerre, dans le climat plus libéral de la jeune république de Weimar.

LA CONDITION DE FEMME, OBSTACLE À LA CARRIÈRE

Déjà en 1907, des discussions avaient eu lieu sur la possibilité d'autoriser des femmes ayant les compétences requises à enseigner dans une université prussienne comme celle de Göttingen. Comme les professeurs s'y étaient opposés à la quasi-unanimité, le ministère de tutelle avait décidé de conserver, dans le règlement de l'*Habilitation*, la clause qui excluait explicitement les femmes. Lorsque le cas d'Emmy Noether se présenta à la faculté de Göttingen huit ans plus tard, la section des mathématiques et des sciences vota à 10 voix contre 7 pour une exemption au règlement. Tous les membres de la faculté participèrent alors à une réunion houleuse, au cours de laquelle Hilbert railla l'opposition en proclamant: «Nous sommes une université, pas un établissement de bains!»

En fin de compte, le ministère refusa de céder. Hilbert se rendit alors à Berlin pour négocier avec ses représentants, et réussit à obtenir d'eux une concession substantielle: à partir du semestre d'hiver 1916-1917, Hilbert put annoncer des cours donnés par «le Professeur Hilbert avec l'assistance de Mademoiselle le docteur Noether». En fait, seule Emmy Noether dispensa ces cours.

Un autre personnage d'envergure ayant apporté son soutien à Emmy Noether était Albert Einstein, qui avait de bonnes relations avec les mathématiciens de Göttingen. Tout comme Klein et Hilbert, Einstein appréciait clairement les talents d'Emmy. Après avoir lu

LES DEUX THÉORÈMES DE NOETHER

Comme Emmy Noether le faisait remarquer au début de son article de 1918, son approche mêlait méthodes du calcul variationnel et théorie de Lie des équations différentielles invariantes par transformations infinitésimales. Tôt dans sa carrière, au XIX^e siècle, le mathématicien norvégien Sophus Lie avait eu l'idée que pour intégrer (c'est-à-dire résoudre) une équation différentielle, il fallait trouver une petite perturbation des courbes solutions de l'équation qui laisse invariante la famille de ces courbes (autrement dit, en appliquant la transformation aux solutions de l'équation, on reste à l'intérieur de l'ensemble des solutions).

Ainsi, s'inspirant de la théorie de Lie, Emmy a énoncé et prouvé un premier théorème, selon lequel pour un système physique décrit par un lagrangien (voir l'encadré page 75), le nombre de grandeurs

physiques conservées est égal au nombre de variations infinitésimales indépendantes qui laissent invariante l'« action » du système (cette action s'exprime sous la forme d'une intégrale portant sur le lagrangien).

Ce premier théorème se rapporte à des groupes de transformations qui dépendent d'un nombre fini de paramètres (par exemple, le groupe des rotations dans le plan dépend d'un seul paramètre, qui est l'angle de la rotation).

Le second théorème de Noether porte sur des groupes de transformations qui dépendent d'un nombre fini de fonctions et de leurs dérivées. En suivant Lie, elle nomma « groupes finis continus » les groupes du premier type, et « groupes continus infinis » ceux du deuxième type.

Le second théorème montre que pour une invariance sous des transformations d'un groupe infini, les équations d'Euler-Lagrange obtenues ne sont plus indépendantes les unes des autres, mais satisfont au contraire certaines identités. Dans le cadre de la relativité générale, ce groupe infini est constitué des transformations induites par des changements arbitraires des coordonnées. Emmy Noether donnait ainsi une explication aux quatre identités que Hilbert avait remarquées en 1915. Plutôt que de leur attribuer une signification physique, elle souligna que ces relations sont des lois de conservation impropres, qui n'ont aucun parallèle avec les lois de conservation de la mécanique classique ou de la relativité restreinte.

D. R.

son article de 1918, il écrira à Hilbert: «Je suis impressionné que l'on puisse considérer ces choses d'un point de vue si général. Cela ne ferait pas de mal aux troupes de retour à Göttingen après le champ de bataille de suivre les cours de M^{lle} Noether. Elle semble très bien connaître son affaire!»

Ce n'est qu'au printemps 1915, peu de temps après l'arrivée d'Emmy Noether à Göttingen, qu'Einstein vint y donner une série de cours sur la théorie de la relativité générale. Cette visite eut lieu quelques mois seulement avant des avancées spectaculaires réalisées en novembre 1915. C'est en effet à ce moment que Hilbert et Einstein découvrirent, chacun de son côté, des équations du champ gravitationnel satisfaisant au principe généralisé de relativité, selon lequel les lois de la physique doivent garder la même forme quel que soit le référentiel

ou système de coordonnées dans lequel on se place.

Les deux versions étaient très voisines, bien que les travaux de Hilbert et ceux d'Einstein aient été guidés par des hypothèses physiques et des méthodes mathématiques très différentes. L'approche mathématique développée par Hilbert était fondée sur des méthodes variationnelles, qui avaient joué un rôle important en mécanique classique depuis les contributions de Joseph-Louis Lagrange, au XVIII^e siècle (voir l'encadré page 75).

DES IDENTITÉS REMARQUÉES PAR HILBERT ET MAL COMPRISES

Einstein avait aussi tenté une telle approche, mais Hilbert fut le premier à exploiter cette piste et à en déduire des équations du champ gravitationnel qui soient pleinement covariantes, c'est-à-dire qui gardent la même forme quel que soit le système de coordonnées adopté. Hilbert remarqua également que son système de quatorze équations satisfaisait quatre identités qu'il interpréta comme un lien entre gravité et électromagnétisme. Mais la nature précise de ces relations est restée obscure, jusqu'aux travaux d'Emmy Noether (voir l'encadré page 76).

Emmy Noether et Fritz, l'un de ses trois frères, en 1933. Cette année-là, avec l'arrivée des nazis au pouvoir, Emmy émigra aux États-Unis. Elle y mourut deux ans plus tard, à la suite de complications d'une opération chirurgicale. Fritz quitta aussi l'Allemagne en 1933. Après avoir occupé un poste de mathématicien à Tomsk, en Union soviétique, il fut arrêté en 1937 en raison de fausses accusations d'espionnage et fut finalement exécuté par les hommes de main de Staline en 1941.



Plus mystérieux encore était ce que Hilbert nomma son «équation de l'énergie invariante», fondée sur une construction complexe connue sous le nom de vecteur énergie de Hilbert. Emmy Noether commença à étudier les propriétés de cette grandeur un peu plus tard, même si elle ne publia rien à ce sujet. Ce qu'elle découvrit, cependant, est évoqué dans un échange tenu en janvier 1918 entre Klein et Hilbert sur le statut de la conservation de l'énergie en relativité générale, échange publié dans un volume (daté de 1917) de la revue *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.

Klein y faisait remarquer: «Comme vous le savez, M^{lle} Noether me conseille continuellement au sujet de mes travaux, et en fait, c'est uniquement grâce à elle que j'ai compris ces questions.» Klein avait été à l'initiative de cet échange, dans lequel il insistait sur le fait que l'équation de l'énergie invariante de Hilbert était une identité générale, et non une véritable loi de conservation au sens de la mécanique classique. Une telle loi de conservation classique ne pouvait être découverte qu'en invoquant des propriétés physiques de la matière, alors que l'équation de Hilbert était la conséquence des équations du champ gravitationnel et de considérations purement formelles. Klein soulignait en outre qu'Emmy Noether l'avait déjà remarqué et qu'elle s'était occupée des détails dans un manuscrit. Hilbert répondit à Klein:

«Je suis tout à fait d'accord avec la substance de vos affirmations sur les théorèmes d'énergie. Emmy Noether, à qui j'ai demandé de l'aide il y a plus d'un an pour clarifier ce genre de question analytique à propos de mon théorème d'énergie, a trouvé à cette époque que [...] les composantes d'énergie que j'avais proposées – ainsi que celles d'Einstein – pourraient être transformées formellement en expressions dont la divergence est identiquement nulle [...].» Traduite en termes simples, la dernière partie de cette citation signifie que la loi de conservation que Hilbert a trouvée pour son «vecteur énergie» résultait de manipulations mathématiques purement formelles et constituait donc une identité, une sorte de tautologie sans conséquences sur la physique.

Ces mots échangés entre Klein et Hilbert, ainsi que des notes prises par Rudolf Himm, un étudiant suisse d'Emmy Noether, montrent que les résultats de la mathématicienne avaient de toute évidence anticipé les principaux arguments de Klein.

Hilbert n'était pas seulement d'accord, de façon générale, avec l'analyse de Klein concernant le statut des lois de conservation. Il alla plus loin en affirmant que l'absence d'analogie entre la conservation de l'énergie classique et sa propre équation d'énergie était une ➤