

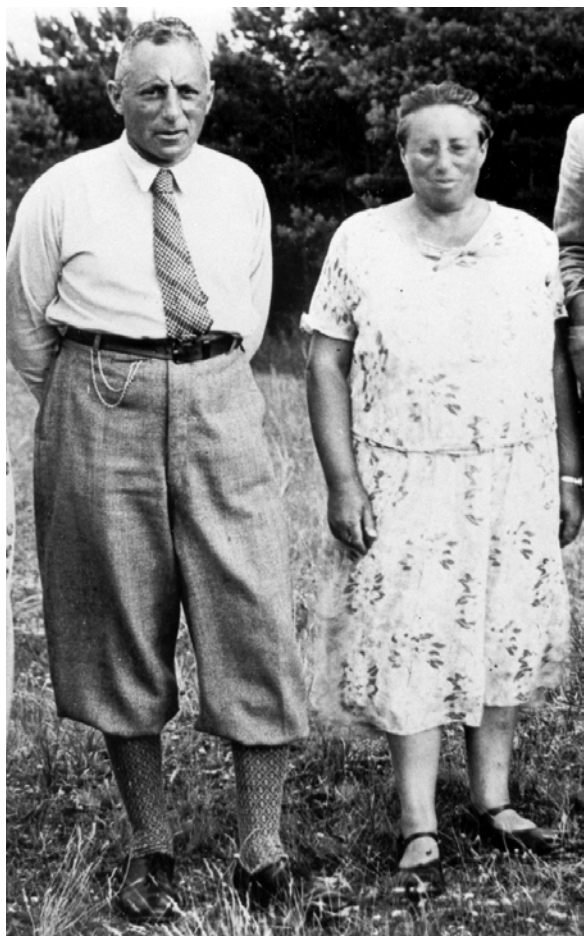
ou système de coordonnées dans lequel on se place.

Les deux versions étaient très voisines, bien que les travaux de Hilbert et ceux d'Einstein aient été guidés par des hypothèses physiques et des méthodes mathématiques très différentes. L'approche mathématique développée par Hilbert était fondée sur des méthodes variationnelles, qui avaient joué un rôle important en mécanique classique depuis les contributions de Joseph-Louis Lagrange, au XVIII^e siècle (voir l'encadré page 75).

DES IDENTITÉS REMARQUÉES PAR HILBERT ET MAL COMPRISES

Einstein avait aussi tenté une telle approche, mais Hilbert fut le premier à exploiter cette piste et à en déduire des équations du champ gravitationnel qui soient pleinement covariantes, c'est-à-dire qui gardent la même forme quel que soit le système de coordonnées adopté. Hilbert remarqua également que son système de quatorze équations satisfaisait quatre identités qu'il interpréta comme un lien entre gravité et électromagnétisme. Mais la nature précise de ces relations est restée obscure, jusqu'aux travaux d'Emmy Noether (voir l'encadré page 76).

Emmy Noether et Fritz, l'un de ses trois frères, en 1933. Cette année-là, avec l'arrivée des nazis au pouvoir, Emmy émigra aux États-Unis. Elle y mourut deux ans plus tard, à la suite de complications d'une opération chirurgicale. Fritz quitta aussi l'Allemagne en 1933. Après avoir occupé un poste de mathématicien à Tomsk, en Union soviétique, il fut arrêté en 1937 en raison de fausses accusations d'espionnage et fut finalement exécuté par les hommes de main de Staline en 1941.



Plus mystérieux encore était ce que Hilbert nomma son «équation de l'énergie invariante», fondée sur une construction complexe connue sous le nom de vecteur énergie de Hilbert. Emmy Noether commença à étudier les propriétés de cette grandeur un peu plus tard, même si elle ne publia rien à ce sujet. Ce qu'elle découvrit, cependant, est évoqué dans un échange tenu en janvier 1918 entre Klein et Hilbert sur le statut de la conservation de l'énergie en relativité générale, échange publié dans un volume (daté de 1917) de la revue *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.

Klein y faisait remarquer: «Comme vous le savez, M^{lle} Noether me conseille continuellement au sujet de mes travaux, et en fait, c'est uniquement grâce à elle que j'ai compris ces questions.» Klein avait été à l'initiative de cet échange, dans lequel il insistait sur le fait que l'équation de l'énergie invariante de Hilbert était une identité générale, et non une véritable loi de conservation au sens de la mécanique classique. Une telle loi de conservation classique ne pouvait être découverte qu'en invoquant des propriétés physiques de la matière, alors que l'équation de Hilbert était la conséquence des équations du champ gravitationnel et de considérations purement formelles. Klein soulignait en outre qu'Emmy Noether l'avait déjà remarqué et qu'elle s'était occupée des détails dans un manuscrit. Hilbert répondit à Klein:

«Je suis tout à fait d'accord avec la substance de vos affirmations sur les théorèmes d'énergie. Emmy Noether, à qui j'ai demandé de l'aide il y a plus d'un an pour clarifier ce genre de question analytique à propos de mon théorème d'énergie, a trouvé à cette époque que [...] les composantes d'énergie que j'avais proposées – ainsi que celles d'Einstein – pourraient être transformées formellement en expressions dont la divergence est identiquement nulle [...].» Traduite en termes simples, la dernière partie de cette citation signifie que la loi de conservation que Hilbert a trouvée pour son «vecteur énergie» résultait de manipulations mathématiques purement formelles et constituait donc une identité, une sorte de tautologie sans conséquences sur la physique.

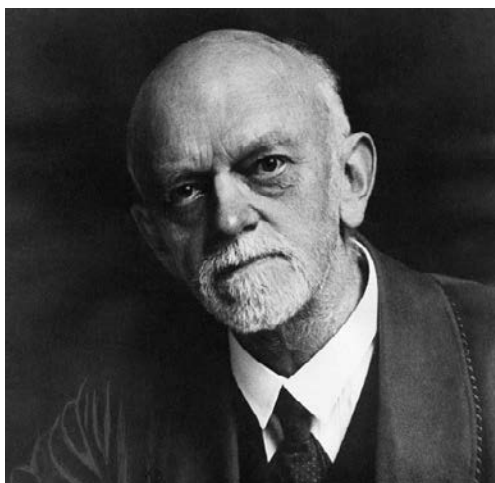
Ces mots échangés entre Klein et Hilbert, ainsi que des notes prises par Rudolf Himm, un étudiant suisse d'Emmy Noether, montrent que les résultats de la mathématicienne avaient de toute évidence anticipé les principaux arguments de Klein.

Hilbert n'était pas seulement d'accord, de façon générale, avec l'analyse de Klein concernant le statut des lois de conservation. Il alla plus loin en affirmant que l'absence d'analogie entre la conservation de l'énergie classique et sa propre équation d'énergie était une >

FELIX KLEIN, DAVID HILBERT ET GÖTTINGEN

Au début du XX^e siècle, le département de mathématiques de l'université de Göttingen était devenu un centre d'excellence mondial, jusqu'en 1933 (arrivée au pouvoir des nazis). C'est là notamment que s'est développée l'algèbre abstraite moderne, dont ont hérité plusieurs champs actuels de la recherche mathématique. L'essor de l'école de Göttingen est en grande partie dû aux efforts de deux mathématiciens brillants et influents, Felix Klein et David Hilbert. Klein, qui avait rejoint

Göttingen en 1886, est notamment connu pour son « programme d'Erlangen » de 1872, qui donnait de la géométrie une vision unifiée, axée sur la notion d'invariance sous des groupes de transformations. Hilbert, plus jeune, est arrivé à Göttingen en 1895. Considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de son époque, il a énoncé en 1900, lors d'un congrès international à Paris, une liste célèbre de 23 grands problèmes ouverts, qui a inspiré beaucoup de recherches du XX^e siècle.



À gauche :
Felix Klein (1849-1925).
À droite :
David Hilbert (1862-1943).

> caractéristique de la relativité générale. Il fit même l'hypothèse qu'il était possible de le prouver à titre de théorème. Klein répondit : « Je serais très intéressé de voir la preuve mathématique à laquelle vous faites allusion dans votre réponse. » Pour lui, il s'agissait d'expliquer clairement ce que signifiait une loi de conservation ayant un contenu physique réel, par opposition à l'expression d'une propriété purement formelle. Cela devint le principal problème auquel s'attela Emmy Noether au début de 1918 dans ses travaux sur les « problèmes variationnels invariants ».

Après divers échanges avec Klein, Emmy Noether acheva ces travaux et présenta le 23 juillet ses résultats (voir l'encadré page 76) à la Société mathématique de Göttingen.

Concernant les interprétations physiques, elle nota que son premier théorème généralisait le formalisme sous-tendant les résultats usuels relatifs aux « intégrales premières » (les grandeurs conservées) en mécanique classique.

Elle caractérisa son second théorème comme étant « la généralisation, en termes de théorie des groupes, la plus générale possible de la "relativité générale" ». Non seulement les résultats fondamentaux qu'elle obtint clarifiaient le statut de l'équation d'énergie de Hilbert, mais ils décrivaient aussi les modalités selon lesquelles les lois de conservation apparaissent, que ce soit en mécanique classique ou dans les théories modernes des champs. Quant à l'hypothèse de Hilbert selon laquelle

l'absence d'une loi propre de conservation de l'énergie constituait une caractéristique de la théorie de la relativité générale, Emmy Noether la commenta ainsi dans son article :

« Pour que cette assertion soit littéralement valide, il est nécessaire de comprendre le terme de "relativité générale" dans un sens plus large qu'habituellement, et de l'étendre aux groupes mentionnés précédemment qui dépendent de fonctions. »

BIBLIOGRAPHIE

D. E. Rowe, **A Richer Picture of Mathematics. The Göttingen Tradition and Beyond**, Springer, 2018.

Y. Kosmann-Schwarzbach, **Les théorèmes de Noether. Invariance et lois de conservation au xx^e siècle**, École Polytechnique, 2006.

D. E. Rowe, **The Göttingen response to general relativity and Emmy Noether's theorems**, dans *The Symbolic Universe. Geometry and Physics, 1890-1930*, J. Gray (éd.), Oxford University Press, 1999, pp. 189-233.

R. Siegmund-Schultze, **Göttinger Felgräue, Einstein und die verzögerte Wahrnehmung [...]**, *Mitteilungen der DMV*, vol. 19, pp. 100-104, 2011.

DES RÉSULTATS CONFORTANT LA VISION DE FELIX KLEIN

Klein soumit cet article à la Société scientifique de Göttingen le 26 juillet avec beaucoup de satisfaction. En fait, il voyait dans les découvertes d'Emmy Noether une justification de son célèbre « programme d'Erlangen », écrit en 1872 et qui donnait de la géométrie une vision unifiée en tant qu'étude des propriétés qui restent inchangées par des groupes de transformations. Klein adapta plus tard ses principes fondés sur la théorie des groupes pour en faire une doctrine générale pour la nouvelle physique. D'après son programme d'Erlangen, il fallait ainsi comprendre au sens large la théorie de la relativité comme la théorie des invariants relatifs à un certain groupe de transformations. De toute évidence, Emmy Noether considérait que ses travaux sur les lois de conservation dérivées de principes variationnels s'inscrivaient dans ce programme général. ■

CE MAGAZINE VOUS PLAÎT ?

OFFRE
1 AN

ABONNEZ-VOUS À POUR LA SCIENCE

3 FORMULES
AU CHOIX

	FORMULE PAPIER	FORMULE PAPIER + HORS-SÉRIE	FORMULE INTÉGRALE
Le magazine papier (12 numéros par an)	✓	✓	✓
Le Hors-Série papier (4 numéros par an)		✓	✓
L'accès en ligne illimité www.pourlascience.fr			✓
L'édition numérique du magazine (12 numéros par an)			✓
L'édition numérique du Hors-Série (4 numéros par an)			✓
L'accès aux archives numériques depuis 1996			✓
VOTRE TARIF D'ABONNEMENT	59 € Au lieu de 82,80 €	79 € Au lieu de 114,40 €	99 € Au lieu de 174,40 €
VOTRE RÉDUCTION*	- 29 %	- 31 %	- 43 %

BULLETIN D'ABONNEMENT

À renvoyer accompagné de votre règlement à :
Pour la Science – Service abonnements – 19 rue de l'Industrie – BP 90053 – 67402 Illkirch Cedex – email : pourlascience@abopress.fr

PAG18STD

☒ **OUI, je m'abonne
pour 1 an à**
POUR LA SCIENCE

1 / JE CHOISIS MA FORMULE (merci de cocher)

- ☐ **FORMULE
INTÉGRALE**
• 12 n° du magazine papier
• 4 Hors-Séries papier
• Accès illimité aux contenus en ligne
99 €
Au lieu de 174,40 €
IIA99E
- ☐ **FORMULE PAPIER
+ HORS-SÉRIE**
• 12 n° du magazine papier
• 4 Hors-Séries papier
79 €
Au lieu de 114,40 €
PIA79E
- ☐ **FORMULE
PAPIER**
• 12 n° du magazine papier
59 €
Au lieu de 82,80 €
DIA59E

* Par rapport au prix de vente en kiosque, l'accès numérique aux archives. Délai de livraison : dans le mois suivant l'enregistrement de votre règlement. Offre réservée aux nouveaux abonnés, valable jusqu'au 31/12/2018 en France métropolitaine uniquement. Pour un abonnement à l'étranger, merci de consulter boutique.pourlascience.fr. Conformément à la loi « Informatique et libertés » du 6 janvier 1978, vous disposez d'un droit d'accès et de rectification aux données vous concernant en adressant un courrier à *Pour la Science*. Photos non contractuelles.

2 / J'INDIQUE MES COORDONNÉES

☐ M. ☐ Mme

Nom : Prénom :

Adresse :

Code postal [] [] [] [] [] [] Ville :

Téléphone [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []

Email : (indispensable pour la formule intégrale)

.....@.....

J'accepte de recevoir les informations de Pour la Science
et de ses partenaires

☐ OUI ☐ NON
☐ OUI ☐ NON

3 / JE CHOISIS MON MODE DE RÈGLEMENT

☐ Par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ Carte bancaire

Numéro [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []

Date d'expiration [] [] [] [] Clé (les 3 chiffres au dos de votre CB) [] [] []

Signature obligatoire :

Groupe Pour la Science – Siège social : 170 bis, boulevard du Montparnasse, CS20012, 75680 Paris Cedex 14 – Sarl au capital de 32 000 € – RCS Paris B 311 797 393 – Siret : 311 797 393 000 23 – APE 5814 Z



PLUS SIMPLE, PLUS RAPIDE
ABONNEZ-VOUS SUR BOUTIQUE.POURLASCIENCE.FR