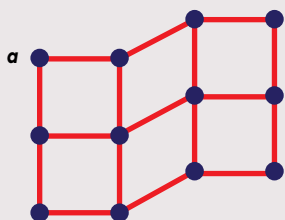


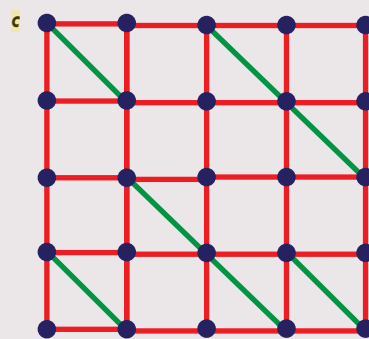
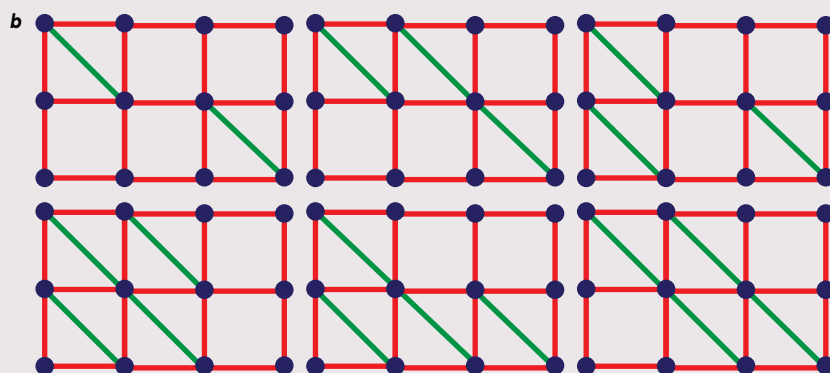
DÉFORMABLES OU RIGIDES ?

1



On considère des grilles faites de barres de même longueur attachées aux points de jonction. Les articulations (en bleu foncé) étant souples, une telle grille peut se déformer (a). On suppose toutefois que toutes les barres restent dans un même plan. Afin de rendre la grille rigide, on a ajouté des tringles obliques (en vert). Pour certains

assemblages, on a ajouté suffisamment de barres vertes, pour d'autres non. Serez-vous reconnaître quels assemblages, parmi les six dessinés en b et celui dessiné en c, sont rigides ? Pourquoi ? Quel est le nombre minimal de barres obliques qu'il faut ajouter à une grille rectangulaire de taille $p \times q$ pour qu'elle devienne rigide ?



des tringles déterminent 8 groupes de 5 tringles. L'un de ces groupes de 5 tringles toujours parallèles est figuré en rouge sur le schéma a de l'encadré 3, un autre est figuré en vert. En prenant en compte toutes ces contraintes de parallélisme, on sépare les 40 tringles en 8 groupes de 5 tringles. Ce sont, d'une part: (1) les 5 tringles en rouge au-dessus de la tringle x_1 ; (2) les 5 tringles au-dessus de x_2 ; (3) celles au-dessus de x_3 ; (4) celles au-dessus de x_4 . D'autre part, les tringles verticales se regroupent en 4 groupes de 5: (5) celles à la même hauteur que y_1 ; (6) celles à la même hauteur que y_2 ; (7) celles (en vert) à la même hauteur que y_3 ; et (8) celles à la même hauteur que y_4 .

Nous désignerons chacun de ces 8 paquets de 5 tringles par le nom de la tringle «maîtresse» du bas ou de gauche. Les 8 paquets sont donc $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$ et y_4 .

Remarquons maintenant qu'à chaque fois qu'on introduit 1 tringle transversale, on contraint 2 tringles de paquets différents à être orthogonales, et donc toutes les tringles d'un paquet à être orthogonales à toutes les tringles d'un autre paquet. Par exemple, en introduisant 1 tringle transversale (en gris dans le schéma a de l'encadré 3) dans la colonne x_1 et dans la ligne y_3 , on oblige les 5 tringles de x_1 (en rouge) à rester orthogonales aux 5 tringles de y_3 (en vert).

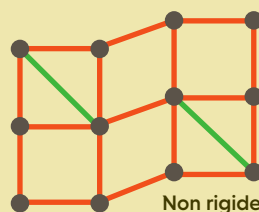
Quand plusieurs tringles transversales sont insérées dans le réseau, pour faire le bilan de contraintes d'orthogonalité créées, il est utile de dessiner un graphe dont les nœuds sont les huit groupes $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ et dont les arcs sont ceux correspondants aux tringles

LA RÉPONSE PAR LE BRICOLAGE

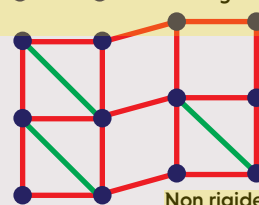
2

Pour résoudre les problèmes de l'encadré ci-dessus, on peut construire les grilles en Meccano et les secouer. Reste

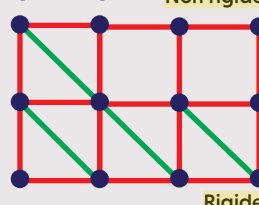
la question : pour rigidifier une grille quelconque, combien de barres diagonales faut-il, et comment les placer ?



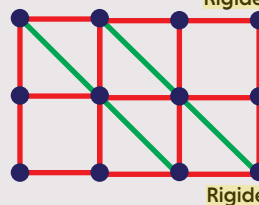
Non rigide



Non rigide



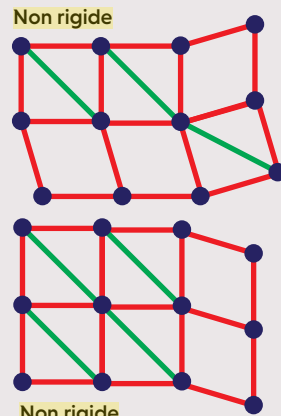
Non rigide



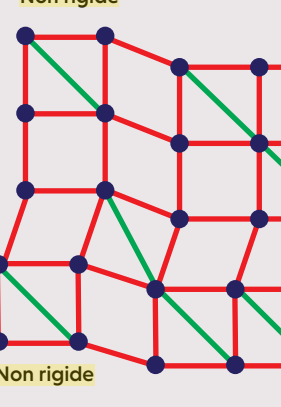
Rigide



Non rigide



Non rigide



Non rigide

3

CONTRAINTES DE PARALLÉLISME ET D'ORTHOGONALITÉ

> transversales établissant des contraintes, comme nous l'avons vu avec x_1 et y_3 . Les graphes associés à deux grilles 4×4 (dont celle de l'encadré 1, schéma c) sont dessinés dans la figure b de l'encadré 3.

LA THÉORIE DES GRAPHES POUR COMPRENDRE

Dans ces graphes, si 2 paquets de tringles sont reliés par un chemin, cela signifie qu'ils sont rigidement associés. Si ce sont 2 paquets de tringles horizontales (ou 2 paquets de tringles verticales), c'est que les tringles des 2 paquets sont toutes parallèles; si l'un des 2 paquets est horizontal et l'autre vertical, c'est que chaque tringle de l'un des paquets est orthogonale à chaque tringle de l'autre.

Pour que le réseau soit rigide, il suffit donc que tous les nœuds du graphe soient reliés,

c'est-à-dire que le graphe associé au réseau soit « d'un seul tenant » ou, en termes de théorie des graphes, « connexe » (pas de nœuds ou de groupes de nœuds isolés).

La réciproque est vraie aussi, comme les mathématiciens américains Ethan Bolker et Henry Crapo l'ont établi en 1979. Finalement, pour savoir si un réseau de ce type est rigide, il faut et il suffit que le graphe associé aux familles de tringles (les x_i et les y_j) soit connexe.

Pour illustrer cette propriété, on a dessiné dans l'encadré 3 (schéma c) un réseau 6×6 avec quelques tringles transversales et son graphe. Celui-ci comporte 5 composantes connexes, c'est-à-dire qu'il se décompose en 5 sous-graphes non liés entre eux: quand on est dans l'un des sous-graphes, on ne peut pas passer dans un autre en suivant les arcs du graphe. On a aussi dessiné 5 déformations possibles du

Quand une grille à articulations souples, comme celle représentée en a, se déforme, les carrés deviennent des losanges et donc toutes les barres horizontales d'une même colonne (par exemple celles indiquées en rouge) restent parallèles. De même, toutes les barres verticales d'une même ligne (par exemple celles indiquées en vert) restent parallèles. Cela détermine 8 ensembles de 5 barres qui seront toujours parallèles quand on ajoutera des tringles obliques et qu'on

déformera la grille. Chaque tringle oblique crée une contrainte d'orthogonalité (un carré doté d'une telle tringle est indéformable). L'ensemble de ces contraintes se représente par un graphe dont les 8 nœuds ne sont pas les tiges, mais les groupes de 5 tiges (4 groupes de 5 tiges horizontales, et 4 autres groupes de 5 tiges verticales). Pour que toutes les tringles soient solidaires, c'est-à-dire pour que l'assemblage soit rigide, il faut et il suffit qu'il y ait une contrainte entre toute paire de nœuds du graphe,

