

3

> transversales établissant des contraintes, comme nous l'avons vu avec x_1 et y_3 . Les graphes associés à deux grilles 4×4 (dont celle de l'encadré 1, schéma c) sont dessinés dans la figure b de l'encadré 3.

LA THÉORIE DES GRAPHES POUR COMPRENDRE

Dans ces graphes, si 2 paquets de tringles sont reliés par un chemin, cela signifie qu'ils sont rigidement associés. Si ce sont 2 paquets de tringles horizontales (ou 2 paquets de tringles verticales), c'est que les tringles des 2 paquets sont toutes parallèles; si l'un des 2 paquets est horizontal et l'autre vertical, c'est que chaque tringle de l'un des paquets est orthogonale à chaque tringle de l'autre.

Pour que le réseau soit rigide, il suffit donc que tous les nœuds du graphe soient reliés,

c'est-à-dire que le graphe associé au réseau soit « d'un seul tenant » ou, en termes de théorie des graphes, « connexe » (pas de nœuds ou de groupes de nœuds isolés).

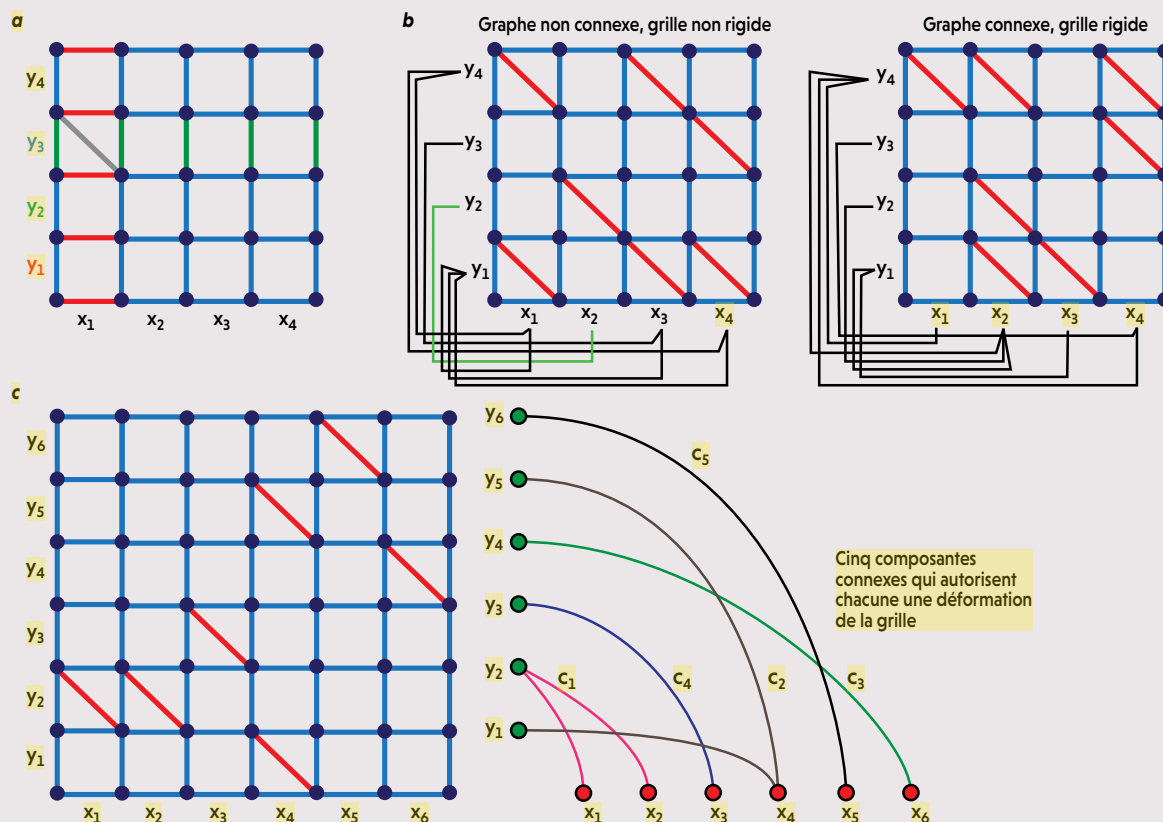
La réciproque est vraie aussi, comme les mathématiciens américains Ethan Bolker et Henry Crapo l'ont établi en 1979. Finalement, pour savoir si un réseau de ce type est rigide, il faut et il suffit que le graphe associé aux familles de tringles (les x_i et les y_j) soit connexe.

Pour illustrer cette propriété, on a dessiné dans l'encadré 3 (schéma c) un réseau 6×6 avec quelques tringles transversales et son graphe. Celui-ci comporte 5 composantes connexes, c'est-à-dire qu'il se décompose en 5 sous-graphes non liés entre eux: quand on est dans l'un des sous-graphes, on ne peut pas passer dans un autre en suivant les arcs du graphe. On a aussi dessiné 5 déformations possibles du

CONTRAINTES DE PARALLÉLISME ET D'ORTHOGONALITÉ

Quand une grille à articulations souples, comme celle représentée en a, se déforme, les carrés deviennent des losanges et donc toutes les barres horizontales d'une même colonne (par exemple celles indiquées en rouge) restent parallèles. De même, toutes les barres verticales d'une même ligne (par exemple celles indiquées en vert) restent parallèles. Cela détermine 8 ensembles de 5 barres qui seront toujours parallèles quand on ajoutera des tringles obliques et qu'on

déformera la grille. Chaque tringle oblique crée une contrainte d'orthogonalité (un carré doté d'une telle tringle est indéformable). L'ensemble de ces contraintes se représente par un graphe dont les 8 nœuds ne sont pas les tiges, mais les groupes de 5 tiges (4 groupes de 5 tiges horizontales, et 4 autres groupes de 5 tiges verticales). Pour que toutes les tringles soient solidaires, c'est-à-dire pour que l'assemblage soit rigide, il faut et il suffit qu'il y ait une contrainte entre toute paire de nœuds du graphe,



réseau, chacune associée à une composante connexe du graphe.

NOMBRE MINIMUM DE BARRES TRANSVERSALES

On peut maintenant assez facilement répondre à la question: combien faut-il au minimum de tringles obliques pour rigidifier un réseau rectangulaire de a carrés de large et de b carrés de haut? Le graphe associé au réseau comporte $a+b$ nœuds; on peut les joindre pour former un graphe connexe en utilisant $a+b-1$ arcs, par exemple de la façon suivante:

$$\begin{aligned} x_1-y_1, x_1-y_2, \dots, x_1-y_b, \\ x_2-y_1, x_3-y_1, \dots, x_a-y_1. \end{aligned}$$

Il est impossible de rendre le graphe connexe en utilisant moins de $a+b-1$ arcs, car on montre facilement qu'un graphe connexe de k nœuds comporte au moins $k-1$ arcs.

On montre aussi que si un graphe de k nœuds est connexe et comporte plus de $k-1$ arcs, on peut enlever certains de ces arcs et n'en garder que $k-1$ tout en préservant la propriété de connexité. Dans notre problème, ce résultat se traduit de manière intéressante: si un réseau rectangulaire de taille $a \times b$ est rigide et comporte plus de $a+b-1$ tringles obliques, alors on peut enlever certaines de celles-ci jusqu'à n'en laisser que $a+b-1$ en préservant la rigidité.

Attention, nous n'avons pas dit que, dès qu'il y a plus de $a+b-1$ tringles obliques, le réseau est rigide: ce n'est vrai que si le graphe associé est connexe. Attention aussi, on ne dit pas non plus que n'importe quelle tringle oblique peut être enlevée: il faut bien choisir les $a+b-1$ tringles que l'on garde, de façon à préserver la connexité. >

c'est-à-dire qu'on puisse passer d'un nœud N du graphe à un autre N' pour toute paire $N-N'$. Dit autrement, il faut que le graphe associé à la grille soit connexe. Ce n'est pas le cas du premier graphe de la figure *b* à cause des nœuds x_2 et y_2 : ils sont liés entre eux, mais pas aux autres nœuds du graphe. Le premier assemblage de tringles n'est donc pas rigide, comme nous l'avons vu par bricolage (voir l'encadré 2). Le second graphe de *b* est, lui, connexe et c'est pourquoi l'assemblage auquel il correspond est rigide.

Le graphe associé à un assemblage permet d'identifier quels sous-ensembles de tringles sont liés et ce que cela implique en termes de mouvements. Le graphe associé à la grille 6×6 de la figure *c* comporte 5 composantes connexes, notées ici c_1 , c_2 , c_3 , c_4 et c_5 . À chacune de ces composantes connexes correspond une déformation possible de l'assemblage (figures c_1 à c_5). D'autres déformations, qui associent plusieurs de celles représentées ici, sont possibles.

