

réseau, chacune associée à une composante connexe du graphe.

NOMBRE MINIMUM DE BARRES TRANSVERSALES

On peut maintenant assez facilement répondre à la question: combien faut-il au minimum de tringles obliques pour rigidifier un réseau rectangulaire de a carrés de large et de b carrés de haut? Le graphe associé au réseau comporte $a+b$ nœuds; on peut les joindre pour former un graphe connexe en utilisant $a+b-1$ arcs, par exemple de la façon suivante:

$$x_1-y_1, x_1-y_2, \dots, x_1-y_b,$$

$$x_2-y_1, x_3-y_1, \dots, x_a-y_1.$$

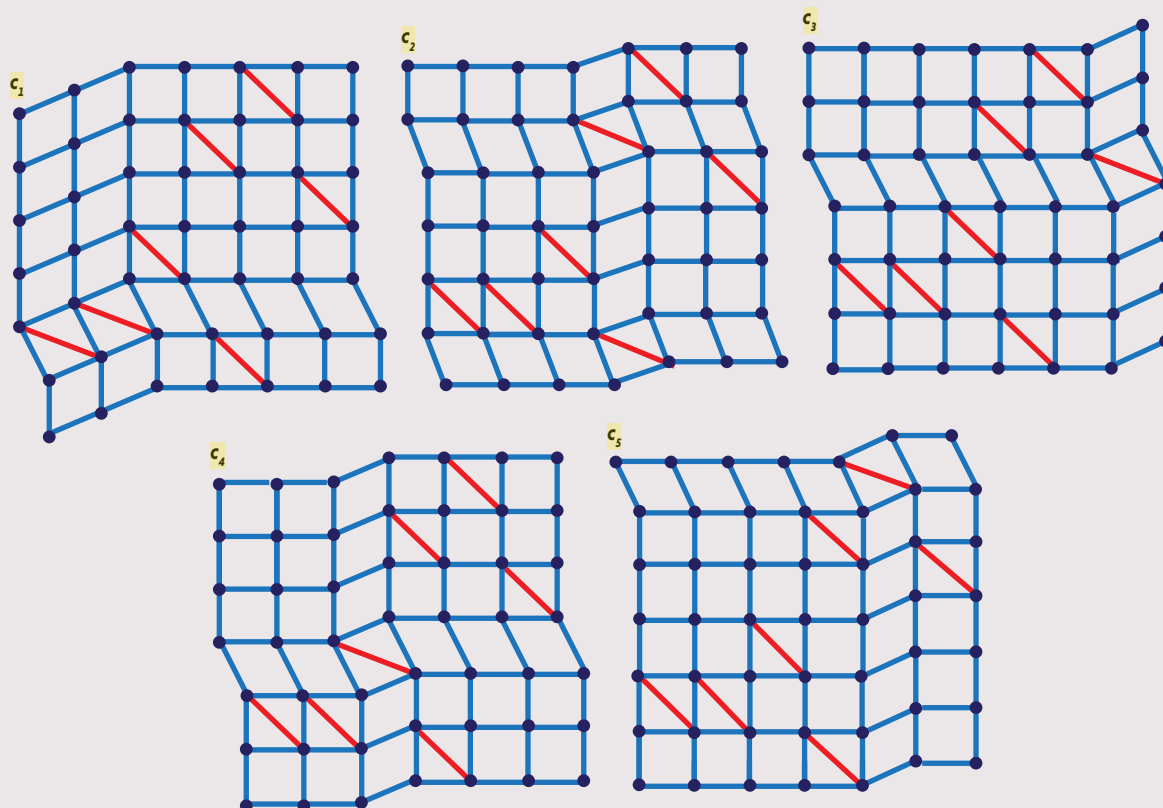
Il est impossible de rendre le graphe connexe en utilisant moins de $a+b-1$ arcs, car on montre facilement qu'un graphe connexe de k nœuds comporte au moins $k-1$ arcs.

On montre aussi que si un graphe de k nœuds est connexe et comporte plus de $k-1$ arcs, on peut enlever certains de ces arcs et n'en garder que $k-1$ tout en préservant la propriété de connexité. Dans notre problème, ce résultat se traduit de manière intéressante: si un réseau rectangulaire de taille $a \times b$ est rigide et comporte plus de $a+b-1$ tringles obliques, alors on peut enlever certaines de celles-ci jusqu'à n'en laisser que $a+b-1$ en préservant la rigidité.

Attention, nous n'avons pas dit que, dès qu'il y a plus de $a+b-1$ tringles obliques, le réseau est rigide: ce n'est vrai que si le graphe associé est connexe. Attention aussi, on ne dit pas non plus que n'importe quelle tringle oblique peut être enlevée: il faut bien choisir les $a+b-1$ tringles que l'on garde, de façon à préserver la connexité. ➤

c'est-à-dire qu'on puisse passer d'un nœud N du graphe à un autre N' pour toute paire $N-N'$. Dit autrement, il faut que le graphe associé à la grille soit connexe. Ce n'est pas le cas du premier graphe de la figure *b* à cause des nœuds x_2 et y_2 : ils sont liés entre eux, mais pas aux autres nœuds du graphe. Le premier assemblage de tringles n'est donc pas rigide, comme nous l'avons vu par bricolage (voir l'encadré 2). Le second graphe de *b* est, lui, connexe et c'est pourquoi l'assemblage auquel il correspond est rigide.

Le graphe associé à un assemblage permet d'identifier quels sous-ensembles de tringles sont liés et ce que cela implique en termes de mouvements. Le graphe associé à la grille 6×6 de la figure *c* comporte 5 composantes connexes, notées ici c_1 , c_2 , c_3 , c_4 et c_5 . À chacune de ces composantes connexes correspond une déformation possible de l'assemblage (figures c_1 à c_5). D'autres déformations, qui associent plusieurs de celles représentées ici, sont possibles.



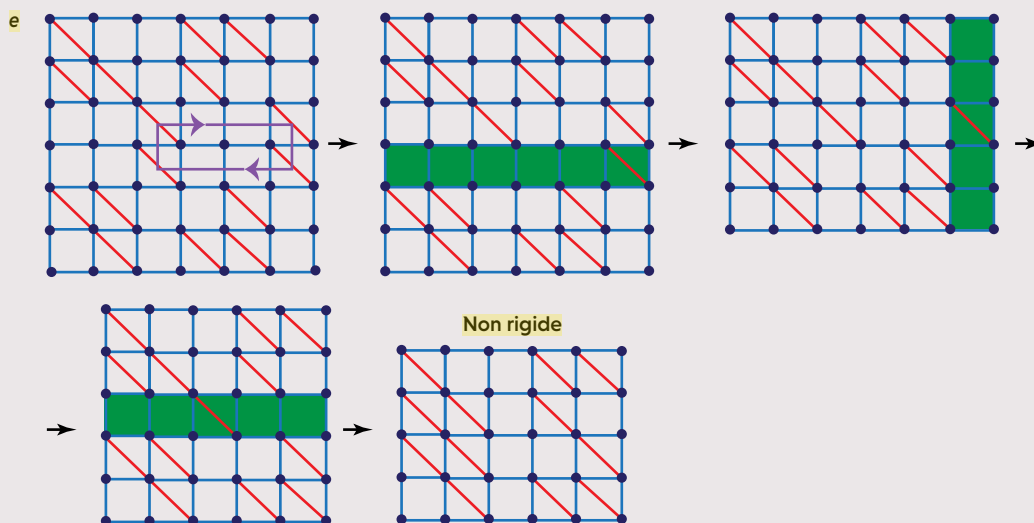
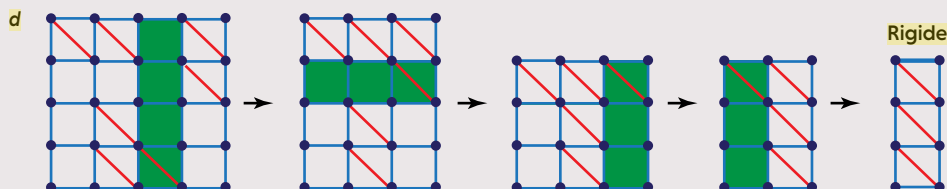
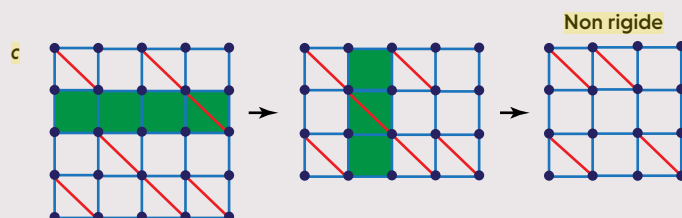
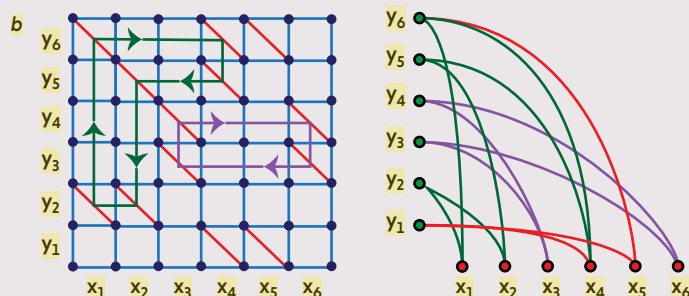
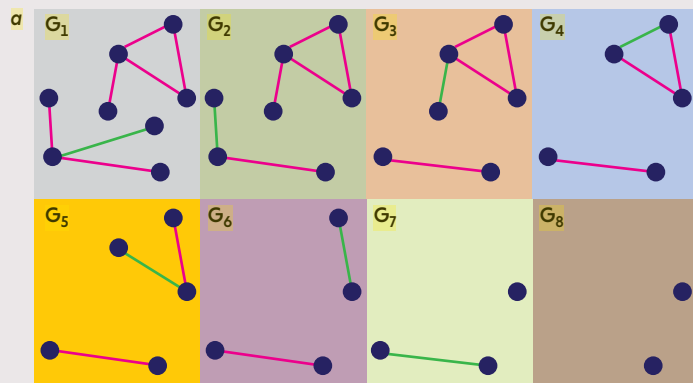
4

DÉSHABILLAGE D'UN GRAPHE ET RÉDUCTION PROGRESSIVE DES GRILLES

Le dessin a illustre les étapes de l'algorithme qui simplifie progressivement (de G_1 à G_8) un graphe sans en changer le nombre de composantes connexes. Quand on trouve un circuit (une suite d'arcs partant d'un nœud et y revenant), on enlève un arc quelconque du circuit. Quand un nœud n'a qu'un seul arc incident, on enlève le nœud et l'arc. Ici, après quelques étapes, on a réduit le graphe initial à 2 nœuds, ce qui signifie que le graphe initial comporte deux composantes connexes et qu'il n'est donc pas connexe.

La figure b représente une grille difficile à analyser et le graphe correspondant, qui n'est pas connexe. On voit qu'à chaque circuit du graphe correspond un circuit sur la grille. Pour appliquer l'algorithme de déshabillage du graphe dans le but de savoir s'il est connexe (et donc si la grille associée est rigide), on peut donc travailler directement sur la grille sans avoir à considérer les graphes : à chaque fois qu'une ligne ou une colonne ne comporte qu'une barre transversale, on supprime la ligne ou la colonne ; à chaque fois qu'on identifie un circuit, on enlève une barre transversale du circuit.

Les séries de dessins c, d et e représentent des applications de cet algorithme de test de rigidité.



> La présence d'une tringle oblique dans chaque colonne et chaque ligne, ou même en posséder 2, ou même 3, etc., n'est jamais une condition suffisante générale assurant la rigidité d'un réseau de ce type. Il faut prendre en compte le graphe associé, et c'est lui qui donne la réponse, celle-ci étant négative s'il n'est pas connexe (voir l'encadré 4 pour un exemple de grille déformable comportant 2 barres obliques au moins dans chaque ligne et chaque colonne).

DES ALGORITHMES POUR LES CAS LES PLUS DIFFICILES

Un algorithme de « déshabillage » permet de savoir si un graphe est connexe. Il résout la question des grilles rigides sans avoir à dessiner la grille de graphes compliqués et emmêlés.

On part d'un graphe qu'on simplifie progressivement en lui ôtant nœuds et arcs en appliquant la règle suivante: quand on trouve un circuit, c'est-à-dire une suite d'arcs partant d'un nœud et y revenant, on supprime un arc quelconque de ce circuit; et quand un nœud n'a qu'un arc incident, on supprime le nœud et l'arc (voir l'encadré 4).

La justification de l'algorithme est facile, car il est clair que son application ne peut déconnecter le graphe s'il est connexe, ni le reconnecter s'il ne l'était pas. L'algorithme, quel que soit l'instant où on l'arrête, produit donc un graphe qui est connexe si celui de départ l'était, ou qui n'est pas connexe si celui de départ ne l'était pas. En fait, l'algorithme préserve exactement le nombre de composantes connexes du graphe de départ.

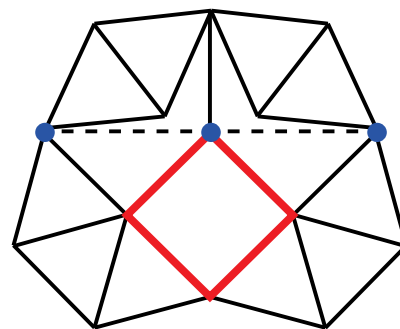
Notons que les circuits du graphe associé à une grille avec tringles transversales peuvent se voir directement sur la grille. En effet, il existe un circuit si l'on peut passer de barre oblique en barre oblique en ne se déplaçant que verticalement ou horizontalement (comme une tour au jeu d'échecs) et revenir à son point de départ. La figure b de l'encadré 4 illustre l'idée: deux circuits sont dessinés sur le graphe associé à la grille et les circuits correspondants directement visibles sur la grille sont aussi dessinés. Repérer les circuits directement sur la grille est plus facile que sur le graphe associé, souvent très emmêlé.

ALGORITHME DE TEST DE RIGIDITÉ D'UNE GRILLE

Comme indiqué dans l'encadré 4, si une ligne ou une colonne ne contient qu'une tringle oblique, on enlève toute la ligne ou toute la colonne. Si une série de tringles obliques forme un circuit, on enlève une tringle oblique quelconque du circuit. Quand on arrive à une grille qui est évidemment rigide ou non rigide, on a la réponse pour la grille initiale.

Il y a bien sûr plusieurs façons de rigidifier une grille donnée de taille $a \times b$ en y plaçant le

5



RIGIDIFIER UN CARRÉ

Si un carré de côté L est donné, combien faut-il introduire de tiges (ne se croisant pas) de longueur L liées et articulées par leurs extrémités pour immobiliser le carré, le tout restant dans un plan ? La meilleure réponse connue utilise 23 barres (voir la figure) ; elle a été trouvée par sept lecteurs de Martin Gardner, qui

avait posé la question dans sa célèbre rubrique mathématique dans *Scientific American*. Saurez-vous faire mieux, ou démontrer qu'on ne peut pas faire mieux ? Erich Friedman, de l'université Stetson, présente d'autres problèmes de ce type sur ses pages web (<https://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0100.html>).

minimum possible ($a+b-1$) de tringles transversales. La caractérisation en termes de graphes connexes permet de décompter le nombre de façons de rigidifier une grille. Péter Dóbe et Gábor Domokos, de l'université de Budapest, ont montré en 2014 que le nombre de dispositions (minimales) rendant rigide la grille rectangulaire de taille $a \times b$ est $a^{b-1} b^{a-1}$.

Une petite subtilité doit être notée ici. Nous avons supposé que toutes les tringles étaient de même longueur. Si on renonce à cette hypothèse et qu'on envisage des grilles approximativement carrées, alors parfois un peu moins de tringles obliques sont nécessaires pour rigidifier l'assemblage. Bien évidemment, toutes sortes d'autres cas ont été étudiés, généralisant les résultats mentionnés à des grilles rectangulaires trouées, ou à des grilles en trois dimensions.

L'IMMOBILISATION DU CARRÉ

L'un des problèmes de rigidification les plus simples et les plus étonnants dans cette catégorie est celui du carré unique. On place un carré unique sur un plan et on cherche, à l'aide de tringles de même longueur que le côté du carré, liées comme précédemment par des articulations souples, à l'immobiliser pour qu'il ne puisse plus se plier. Combien faut-il au minimum de tringles obliques et comment faut-il les disposer pour réussir cette rigidification du carré ? La réponse est donnée dans l'encadré 5.

La théorie mathématique de la rigidité ne s'arrête pas à ces situations. Elle constitue aujourd'hui un domaine de recherche actif, qui produit régulièrement de nouveaux résultats. ■

BIBLIOGRAPHIE

E. Weisstein, **Braced polygon**, <http://mathworld.wolfram.com/BracedPolygon.html> (consulté en avril 2018).

P. Dóbe, **Efficient algorithms for sensitivity analysis of trusses, adapted for distributed computing infrastructures**, Thèse de l'université de Budapest, 2014.

P. Winkler, **Mathematical Mind-Benders**, CRC Press, 2007.

A. Kaveh, **Optimal structural analysis**, Wiley, 2006.

E. Bolker et H. Crapo, **Bracing rectangular frameworks I**, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 36(3), pp. 473-490, 1979.

M. Gardner, **Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions from Scientific American**, University of Chicago Press, 1971.