

ABONNEZ-VOUS À POUR LA SCIENCE

OFFRE RENTRÉE

1 AN

3 FORMULES
AU CHOIX

	FORMULE PAPIER	FORMULE PAPIER + HORS-SÉRIE	FORMULE INTÉGRALE
Le magazine papier (12 numéros par an)	✓	✓	✓
Le hors-série papier (4 numéros par an)		✓	✓
L'accès en ligne illimité www.pourlascience.fr			✓
L'édition numérique du magazine (12 numéros par an)			✓
L'édition numérique du hors-série (4 numéros par an)			✓
L'accès aux archives numériques depuis 1996			✓
10 € DE RÉDUCTION		✓	✓
VOTRE TARIF D'ABONNEMENT	59€ Au lieu de 82,80€	69€ Au lieu de 114,40€	89€ Au lieu de 174,40€
	29 % de réduction *	40 % de réduction *	49 % de réduction *

BULLETIN D'ABONNEMENT

À renvoyer accompagné de votre règlement à :

Pour la Science – Service abonnements – 19 rue de l'Industrie – BP 90053 – 67402 Illkirch Cedex – email: pourlascience@abopress.fr

PAG18REN



**OUI, je m'abonne
pour 1 an à
POUR LA
SCIENCE**

1 / Je choisis ma formule (merci de cocher)

- ☐ **FORMULE
INTÉGRALE**
 • 12 n° du magazine papier
 • 4 Hors-série papier
 • Accès illimité aux contenus en ligne
89€
 Au lieu de 174,40€
 11A89E
- ☐ **FORMULE PAPIER
+ HORS SÉRIE**
 • 12 n° du magazine papier
 • 4 Hors-série papier
69€
 Au lieu de 114,40€
 31A69E
- ☐ **FORMULE
PAPIER**
 • 12 n° du magazine papier
59€
 Au lieu de 82,80€
 D1A59E

2 / J'indique mes coordonnées

☐ M. ☐ Mme

Nom: Prénom:

Adresse:

Code postal [] [] [] [] [] [] Ville:

Téléphone [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []

Email : (indispensable pour la formule intégrale)

.....@.....

J'accepte de recevoir les offres de Pour la Science

☐ OUI ☐ NON

3 / Je choisis mon mode de règlement

☐ Par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ Carte bancaire

N° [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []

Date d'expiration [] [] [] [] Clé (Les 3 chiffres au dos de votre CB) [] [] []

Signature obligatoire :

* Réduction par rapport au prix de vente en kiosque et l'accès aux archives numériques. Durée d'abonnement: 1 an. Délai de livraison: dans le mois suivant l'enregistrement de votre règlement. Offre valable jusqu'au 31/03/2019 en France métropolitaine uniquement. Pour un abonnement à l'étranger, merci de consulter notre site <https://boutique.pourlascience.fr>. Photos non contractuelles.

Les informations que nous collectons dans ce bulletin d'abonnement nous aident à personnaliser et à améliorer les services que nous vous proposons. Nous les utiliserons pour gérer votre accès à l'intégralité de nos services, traiter vos commandes et paiements, et vous faire part notamment par newsletters de nos offres commerciales moyennant le respect de vos choix en la matière. Le responsable du traitement est la société Pour la Science. Vos données personnelles ne seront pas conservées au-delà de la durée nécessaire à la finalité de leur traitement. Pour la Science ne commercialise ni ne loue vos données à caractère personnel à des tiers. Les données collectées sont exclusivement destinées à Pour la Science. Nous vous invitons à prendre connaissance de notre charte de protection des données personnelles à l'adresse suivante: <https://rebrand.ly/charte-donnees-pls>. Conformément à la réglementation applicable (et notamment au Règlement 2016/679/UE dit «RGPD») vous disposez des droits d'accès, de rectification, d'opposition, d'effacement, à la portabilité et à la limitation de vos données personnelles. Pour exercer ces droits (ou nous poser toute question concernant le traitement de vos données personnelles), vous pouvez nous contacter par courriel à l'adresse protection-donnees@pourlascience.fr.

L'ESSENTIEL

> La géométrie tropicale est un champ mathématique récent, apparu dans les années 1980.

> Cette géométrie repose sur une algèbre dite tropicale, où l'on remplace l'addition de deux termes par la prise de leur maximum, et la multiplication par l'addition.

> Dans cette géométrie, les objets les plus simples, les courbes tropicales, ressemblent à des réseaux de segments et de demi-droites.

> Ils ont des propriétés analogues à celles des courbes de la géométrie algébrique classique, qu'ils permettent donc d'étudier par un autre biais.

L'AUTEUR



ANTOINE CHAMBERT-LOIR
professeur de mathématiques
à l'université Paris-Diderot,
spécialisé en géométrie
algébrique et arithmétique

Quand la géométrie devient tropicale

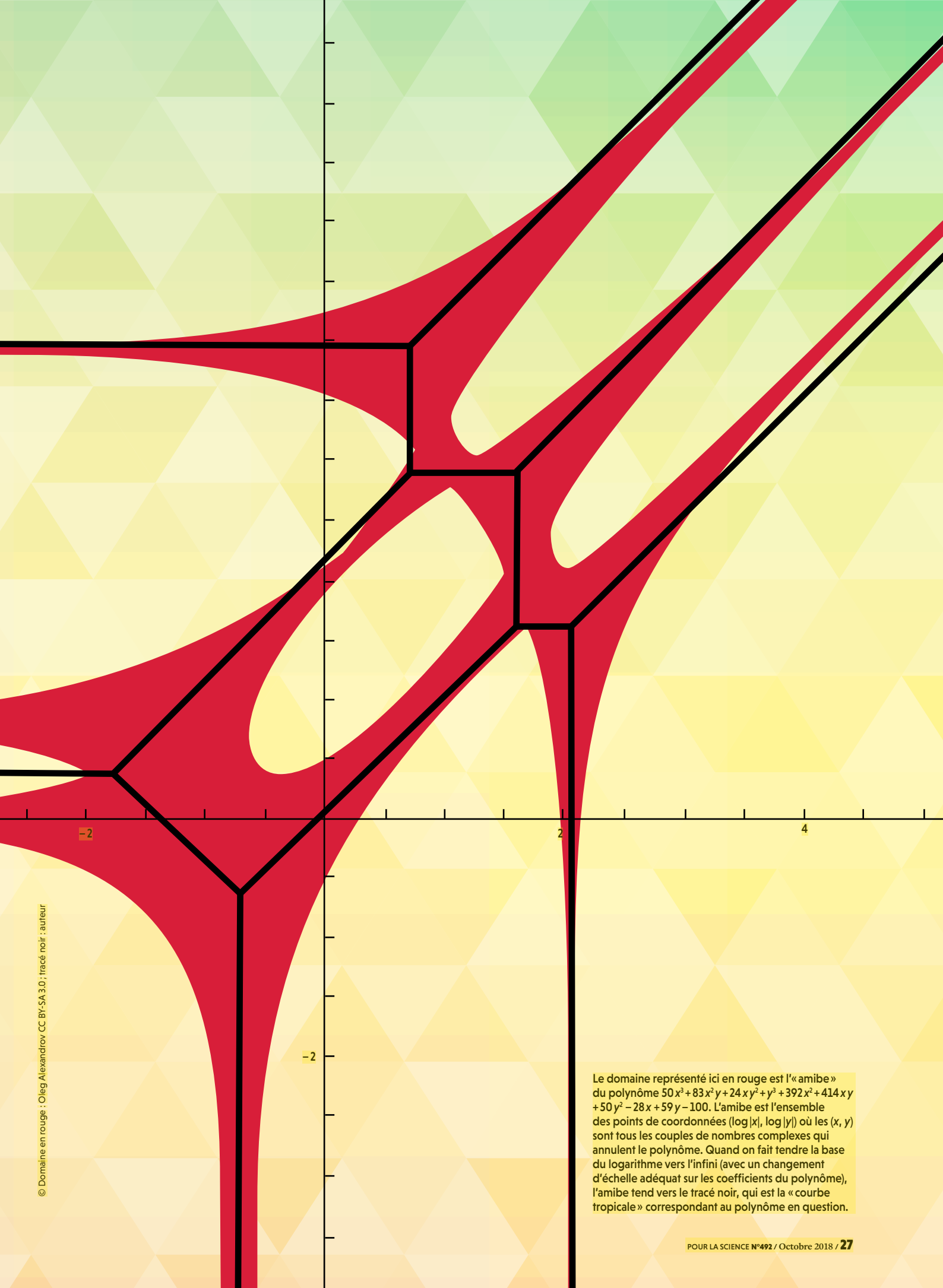
Prendre l'équation d'une courbe, remplacer l'addition et la multiplication par deux opérations plus exotiques, et étudier l'objet géométrique qui en résulte : c'est ce que fait la géométrie tropicale, un domaine récent des mathématiques. Qui profite aussi à la géométrie plus classique.

-4

En mathématiques, pour étudier les propriétés de certains objets, il est fréquent qu'il soit plus commode ou plus fructueux de passer par des objets de nature très différente. Les exemples de tels détours sont légion. L'un des plus élémentaires et des plus répandus est le détour par les nombres complexes (ceux de la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels et i un nombre imaginaire qui vérifie $i^2=-1$) pour résoudre ou étudier des équations ne mettant en œuvre que des coefficients et variables réels. D'ailleurs, le recours aux nombres complexes, que ce soit en analyse, en algèbre ou en géométrie, est tellement universel que, sans lui, les mathématiques d'aujourd'hui n'existeraient pas.

On peut voir la géométrie tropicale, dont il va être question ici, de la même façon. Ce domaine, qui n'a commencé à émerger que dans les années 1980, repose sur une algèbre particulière qui était apparue dans divers contextes des mathématiques discrètes et de l'informatique.

La géométrie tropicale est à présent un champ de recherche très actif, intéressant en soi mais aussi utile à d'autres domaines des mathématiques, en particulier la géométrie algébrique (l'étude des objets géométriques définis par des équations algébriques, construites à l'aide de l'addition et de la multiplication). Ses objets, les courbes tropicales (et, plus généralement, les «variétés» tropicales), ont des propriétés parfois analogues à celles que l'on découvre en géométrie >



Le domaine représenté ici en rouge est l'« amibe » du polynôme $50x^3 + 83x^2y + 24xy^2 + y^3 + 392x^2 + 414xy + 50y^2 - 28x + 59y - 100$. L'amibe est l'ensemble des points de coordonnées $(\log|x|, \log|y|)$ où les (x, y) sont tous les couples de nombres complexes qui annulent le polynôme. Quand on fait tendre la base du logarithme vers l'infini (avec un changement d'échelle adéquat sur les coefficients du polynôme), l'amibe tend vers le tracé noir, qui est la « courbe tropicale » correspondant au polynôme en question.

> algébrique. De ce fait, le passage par la géométrie tropicale permet de découvrir, calculer ou prouver, parfois plus facilement, certaines propriétés des objets de la géométrie algébrique. On l'illustrera ici en montrant comment les courbes tropicales permettent d'aborder un problème de géométrie énumérative, partie de la géométrie algébrique qui consiste à compter les points, courbes, surfaces, etc. vérifiant certaines conditions.

Partons du célèbre postulat d'Euclide: «Par deux points distincts, il passe une droite et une seule», en cherchant à y remplacer la figure géométrique d'une droite par une autre figure géométrique. Considérons par exemple un cercle, et posons les deux questions suivantes: combien faut-il de points du plan pour déterminer un cercle passant par eux? Combien de cercles n points déterminent-ils? On observe d'abord que par deux points A et B donnés, il passe une infinité de cercles. En revanche, si l'on se donne un troisième point C qui n'est pas sur la droite (AB), il n'existe qu'un seul cercle passant par A, B, C: c'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

La question devient un peu plus riche si l'on prend pour figure géométrique une conique. Comme le suggère leur nom, il s'agit des courbes tracées par l'intersection d'un cône et d'un plan. Elles sont essentiellement de trois sortes: les ellipses, les paraboles et les hyperboles (voir la figure page ci-contre). Les courbes du premier type, les ellipses, sont fondamentales en mécanique céleste: ce sont par exemple celles que décrivent les planètes autour du Soleil. Celles du deuxième type sont aussi très importantes dans la vie de tous les jours, puisque c'est d'elles que les antennes satellites – paraboliques – tirent leur forme.

COMPTER DES COURBES RATIONNELLES

Au XVII^e siècle, Pascal avait démontré que par cinq points quelconques, tels que quatre quelconques d'entre eux ne sont pas alignés, il passe une conique, et une seule (voir la figure page 30). L'une des questions qui se posent naturellement en géométrie est s'il est possible de trouver des énoncés analogues pour d'autres familles de courbes. La réponse est oui, comme nous allons le voir.

Les droites et les coniques du plan ont deux qualités, qu'on retrouvera dans les autres courbes en question. Tout d'abord, ce sont des «courbes rationnelles», c'est-à-dire que l'on peut paramétrer les coordonnées de leurs points à l'aide de fractions rationnelles d'une variable t (rappelons qu'une «fraction rationnelle» en t est un quotient $P(t)/Q(t)$ de deux polynômes P et Q , et qu'un polynôme de degré n en la variable t est une expression de la forme $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$, où les a_i sont les coefficients du polynôme).

POURQUOI 3D – 1 POINTS POUR LES COURBES DE DEGRÉ D?

Expliquons pourquoi il faut fixer $3d - 1$ points pour qu'il n'y ait qu'un nombre fini N_d de courbes rationnelles de degré d passant par ces points.

Un paramétrage de degré d d'une courbe rationnelle est de la forme :
 $x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_d t^d) / (\gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_d t^d)$,
 $y(t) = (\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d) / (\gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_d t^d)$.
 Ce paramétrage dépend des $3(d + 1)$ coefficients (ou paramètres !) $\alpha_0, \dots, \alpha_d, \beta_0, \dots, \beta_d, \gamma_0, \dots, \gamma_d$. Cependant, on peut diviser le numérateur et le dénominateur de chacune de ces fractions rationnelles par le même nombre, par exemple γ_d , ce qui élimine un paramètre, de sorte que nous n'avons que $3(d + 1) - 1 = 3d + 2$ paramètres effectifs. Par ailleurs, on peut changer le paramétrage d'une courbe rationnelle sans changer la courbe en remplaçant t par $(at + b)/(ut + w)$; cela fait encore chuter le nombre de paramètres effectifs de $4 - 1 = 3$. Ainsi, finalement, les courbes rationnelles de degré d dépendent de $(3d + 2) - 3 = 3d - 1$ paramètres.

Maintenant, imposons qu'une telle courbe passe par un point M du plan revient à ajouter un paramètre t_M (l'« instant » auquel la courbe paramétrée passe par le point M) et à ajouter les deux équations $x(t_M) = x_M$ et $y(t_M) = y_M$; imposer le passage par le point M fait donc perdre un degré de liberté. Par conséquent, lorsqu'on impose à une courbe rationnelle plane

de degré d , qui dépend *a priori* de $3d - 1$ paramètres, de passer par $3d - 1$ points donnés, il n'y a plus aucun paramètre dont pourraient dépendre les courbes recherchées. À une réserve près, cependant : que les conditions imposées par les $3d - 1$ points ne soient pas redondantes entre elles, ce qui arrive parfois. S'il n'y a pas redondance, on dit que les points sont en position générale (ils font alors tous chuter le nombre de degrés de liberté d'une unité chacun).

Grâce à une théorie algébrique aujourd'hui classique, fort justement appelée théorie de l'élimination, on peut éliminer un à un les paramètres auxiliaires t_M ajoutés dans cette analyse. On se retrouve alors avec un énorme système d'équations polynomiales dont les inconnues sont les paramètres initiaux $\alpha_0, \dots, \alpha_d, \beta_0, \dots, \beta_d, \gamma_0, \dots, \gamma_d$. Ce système n'a qu'un nombre fini de solutions, et c'est précisément ce nombre (N_d) que calcule la formule de Maxim Kontsevich.

Il y a deux aspects, classiques mais subtils, dans ce décompte. D'une part, toutes les solutions des équations polynomiales en jeu ne sont pas forcément des nombres réels, et il faut prendre en compte les valeurs complexes. D'autre part, chaque solution a sa « multiplicité ».

Pour décrire ces deux phénomènes, et montrer leur importance, il est plus simple de considérer le cas d'une équation polynomiale à une inconnue, que l'on peut écrire sous la forme $F(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0 = 0$. Son degré est n , et le théorème de d'Alembert-Gauss (parfois appelé théorème fondamental de l'algèbre) garantit qu'il existe des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $F(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$. Ces nombres complexes sont toutes les solutions de l'équation $F(x) = 0$, et la multiplicité d'une solution est le nombre de fois qu'elle apparaît.

Par exemple, la factorisation $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 = (x - 1)^2 (x - 1 - 2i) (x - 1 + 2i)$ montre que les solutions de l'équation $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 = 0$ sont 1 (multiplicité 2), $1 + 2i$ (multiplicité 1) et $1 - 2i$ (multiplicité 1).

C'est parce que l'on compte toutes les racines, réelles ou complexes, avec leur multiplicité, que le théorème de d'Alembert-Gauss prend une forme très agréable : une équation polynomiale de degré n a exactement n solutions.