

> algébrique. De ce fait, le passage par la géométrie tropicale permet de découvrir, calculer ou prouver, parfois plus facilement, certaines propriétés des objets de la géométrie algébrique. On l'illustrera ici en montrant comment les courbes tropicales permettent d'aborder un problème de géométrie énumérative, partie de la géométrie algébrique qui consiste à compter les points, courbes, surfaces, etc. vérifiant certaines conditions.

Partons du célèbre postulat d'Euclide: «Par deux points distincts, il passe une droite et une seule», en cherchant à y remplacer la figure géométrique d'une droite par une autre figure géométrique. Considérons par exemple un cercle, et posons les deux questions suivantes: combien faut-il de points du plan pour déterminer un cercle passant par eux? Combien de cercles n points déterminent-ils? On observe d'abord que par deux points A et B donnés, il passe une infinité de cercles. En revanche, si l'on se donne un troisième point C qui n'est pas sur la droite (AB), il n'existe qu'un seul cercle passant par A, B, C: c'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

La question devient un peu plus riche si l'on prend pour figure géométrique une conique. Comme le suggère leur nom, il s'agit des courbes tracées par l'intersection d'un cône et d'un plan. Elles sont essentiellement de trois sortes: les ellipses, les paraboles et les hyperboles (voir la figure page ci-contre). Les courbes du premier type, les ellipses, sont fondamentales en mécanique céleste: ce sont par exemple celles que décrivent les planètes autour du Soleil. Celles du deuxième type sont aussi très importantes dans la vie de tous les jours, puisque c'est d'elles que les antennes satellites – paraboliques – tirent leur forme.

COMPTER DES COURBES RATIONNELLES

Au XVII^e siècle, Pascal avait démontré que par cinq points quelconques, tels que quatre quelconques d'entre eux ne sont pas alignés, il passe une conique, et une seule (voir la figure page 30). L'une des questions qui se posent naturellement en géométrie est s'il est possible de trouver des énoncés analogues pour d'autres familles de courbes. La réponse est oui, comme nous allons le voir.

Les droites et les coniques du plan ont deux qualités, qu'on retrouvera dans les autres courbes en question. Tout d'abord, ce sont des «courbes rationnelles», c'est-à-dire que l'on peut paramétrer les coordonnées de leurs points à l'aide de fractions rationnelles d'une variable t (rappelons qu'une «fraction rationnelle» en t est un quotient $P(t)/Q(t)$ de deux polynômes P et Q , et qu'un polynôme de degré n en la variable t est une expression de la forme $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$, où les a_i sont les coefficients du polynôme).

POURQUOI 3D – 1 POINTS POUR LES COURBES DE DEGRÉ D?

Expliquons pourquoi il faut fixer $3d - 1$ points pour qu'il n'y ait qu'un nombre fini N_d de courbes rationnelles de degré d passant par ces points.

Un paramétrage de degré d d'une courbe rationnelle est de la forme :

$$x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_d t^d) / (\gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_d t^d),$$

$$y(t) = (\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d) / (\gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_d t^d).$$

Ce paramétrage dépend des $3(d + 1)$ coefficients (ou paramètres !) $\alpha_0, \dots, \alpha_d, \beta_0, \dots, \beta_d, \gamma_0, \dots, \gamma_d$. Cependant, on peut diviser le numérateur et le dénominateur de chacune de ces fractions rationnelles par le même nombre, par exemple γ_d , ce qui élimine un paramètre, de sorte que nous n'avons que $3(d + 1) - 1 = 3d + 2$ paramètres effectifs. Par ailleurs, on peut changer le paramétrage d'une courbe rationnelle sans changer la courbe en remplaçant t par $(at + b)/(ut + w)$; cela fait encore chuter le nombre de paramètres effectifs de $4 - 1 = 3$. Ainsi, finalement, les courbes rationnelles de degré d dépendent de $(3d + 2) - 3 = 3d - 1$ paramètres.

Maintenant, imposons qu'une telle courbe passe par un point M du plan revient à ajouter un paramètre t_M (l'« instant » auquel la courbe paramétrée passe par le point M) et à ajouter les deux équations $x(t_M) = x_M$ et $y(t_M) = y_M$; imposer le passage par le point M fait donc perdre un degré de liberté. Par conséquent, lorsqu'on impose à une courbe rationnelle plane

de degré d , qui dépend *a priori* de $3d - 1$ paramètres, de passer par $3d - 1$ points donnés, il n'y a plus aucun paramètre dont pourraient dépendre les courbes recherchées. À une réserve près, cependant : que les conditions imposées par les $3d - 1$ points ne soient pas redondantes entre elles, ce qui arrive parfois. S'il n'y a pas redondance, on dit que les points sont en position générale (ils font alors tous chuter le nombre de degrés de liberté d'une unité chacun).

Grâce à une théorie algébrique aujourd'hui classique, fort justement appelée théorie de l'élimination, on peut éliminer un à un les paramètres auxiliaires t_M ajoutés dans cette analyse. On se retrouve alors avec un énorme système d'équations polynomiales dont les inconnues sont les paramètres initiaux $\alpha_0, \dots, \alpha_d, \beta_0, \dots, \beta_d, \gamma_0, \dots, \gamma_d$. Ce système n'a qu'un nombre fini de solutions, et c'est précisément ce nombre (N_d) que calcule la formule de Maxim Kontsevich.

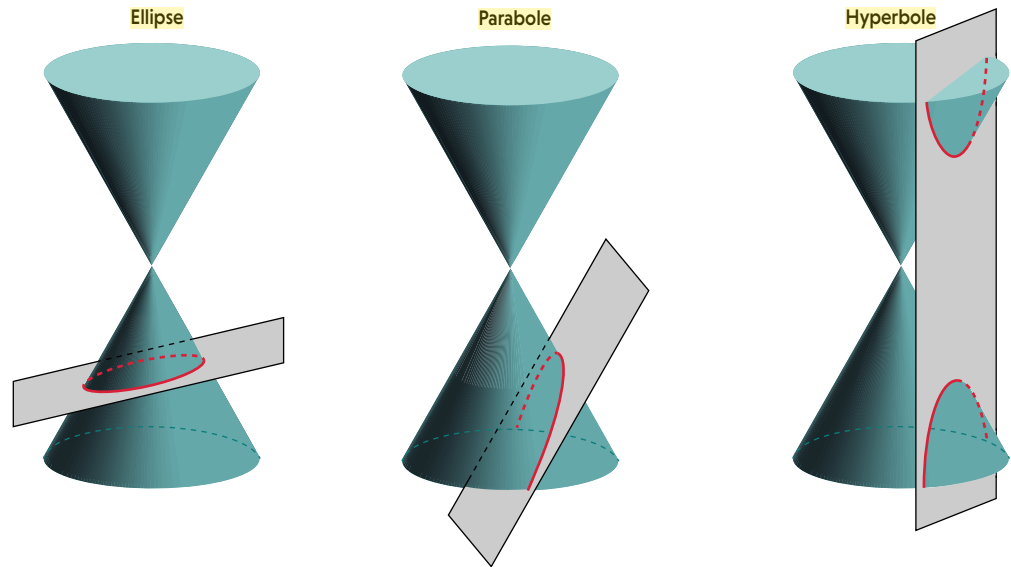
Il y a deux aspects, classiques mais subtils, dans ce décompte. D'une part, toutes les solutions des équations polynomiales en jeu ne sont pas forcément des nombres réels, et il faut prendre en compte les valeurs complexes. D'autre part, chaque solution a sa « multiplicité ».

Pour décrire ces deux phénomènes, et montrer leur importance, il est plus simple de considérer le cas d'une équation polynomiale à une inconnue, que l'on peut écrire sous la forme $F(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0 = 0$. Son degré est n , et le théorème de d'Alembert-Gauss (parfois appelé théorème fondamental de l'algèbre) garantit qu'il existe des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $F(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$. Ces nombres complexes sont toutes les solutions de l'équation $F(x) = 0$, et la multiplicité d'une solution est le nombre de fois qu'elle apparaît.

Par exemple, la factorisation $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 = (x - 1)^2 (x - 1 - 2i) (x - 1 + 2i)$ montre que les solutions de l'équation $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 = 0$ sont 1 (multiplicité 2), $1 + 2i$ (multiplicité 1) et $1 - 2i$ (multiplicité 1).

C'est parce que l'on compte toutes les racines, réelles ou complexes, avec leur multiplicité, que le théorème de d'Alembert-Gauss prend une forme très agréable : une équation polynomiale de degré n a exactement n solutions.

Les coniques (en rouge) sont les courbes nées de l'intersection d'un cône et d'un plan. Ces courbes peuvent être décrites par des équations polynomiales $F(x, y) = 0$ de degré 2. On peut aussi les représenter sous forme paramétrique, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de leurs points étant données par des fractions $P(t)/Q(t)$, où P et Q sont des polynômes en t de degré 2 au plus.



Par exemple, la droite passant par deux points A et B du plan, de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) , admet le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)x_A + tx_B, \\ y(t) &= (1-t)y_A + ty_B, \end{aligned}$$

de façon que quand le paramètre t décrit l'ensemble des nombres réels, le point $(x(t), y(t))$ décrit toute la droite (AB).

Le paramétrage d'une conique est plus subtil, mais se déduit d'une construction géométrique simple ; pour le cercle de centre O et de rayon 1, on obtient : $x(t) = (1-t^2)/(1+t^2)$, $y(t) = 2t/(1+t^2)$.

Les courbes rationnelles peuvent aussi être décrites par une équation $F(x, y) = 0$ où F est un polynôme en x et y . Cette équation polyno-

me sont bien sûr intéressés aux courbes rationnelles de degrés supérieurs.

En 1993, le mathématicien russe Maxim Kontsevich, aujourd'hui professeur permanent à l'IHES (Institut des hautes études scientifiques), près de Paris, a résolu une question qui se posait alors, et dont les droites et les coniques forment les deux premiers cas. Nous avons vu que par deux points, il ne passe qu'une seule droite, et que par cinq points, il ne passe qu'une seule conique. Il s'agissait de généraliser et de déterminer, pour tout entier positif d , le nombre N_d de courbes rationnelles planes de degré d passant par $3d-1$ points. Ces nombres sont des « invariants de Gromov-Witten », issus de considérations mathématiques plus générales inspirées par la théorie des cordes en physique, et nommés d'après Mikhaïl Gromov, qui travaille lui aussi à l'IHES, et Edward Witten, physicien-mathématicien de l'Institut d'études avancées de Princeton, aux États-Unis.

Plus précisément, Maxim Kontsevich a démontré la formule de récurrence, assez incroyable, selon laquelle N_d est égal à : $\sum (a^2 b^2 C(3d-4, 3a-2) - a^3 b C(3d-4, 3a-1)) N_a N_b$, où la somme $\sum$ porte sur tous les entiers positifs a et b tels que $a+b=d$ et où $C(p, q)$ désigne ici le coefficient binomial $p!/[q!(p-q)!]$, avec $p! = p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Compte tenu de $N_1 = 1$, cette formule permet de calculer tous les autres N_d de proche en proche. En particulier, on retrouve $N_2 = 1$ (comme Pascal l'avait prouvé en géométrie pure), $N_3 = 12$ (autrement dit, par 8 points donnés, il passe en général 12 courbes de degré 3, c'est-à-dire cubiques), $N_4 = 620$ (calculé par le mathématicien danois Hieronymus Zeuthen en 1873), $N_5 = 87304$ (qui avait été calculé juste avant que Maxim Kontsevich ne présente sa formule). Mais on obtient aussi les valeurs inédites :

$N_6 = 26\,312\,976$, $N_7 = 14\,616\,808\,192$, $N_8 = 13\,525\,751\,027\,392$, etc.

L'entier $3d-1$ qui apparaît dans le problème résolu par Maxim Kontsevich peut sembler ➤

On cherchait le nombre de courbes rationnelles planes de degré d passant par $3d-1$ points

miale est de la forme $ax+by+c=0$ dans le cas d'une droite, et $x^2+y^2=R^2$ pour le cercle de rayon R centré en l'origine. Le degré d de F est le degré de la courbe rationnelle plane ; il est égal à 1 pour les droites, à 2 pour le cercle et les autres coniques.

Cependant, les droites et les coniques ne sont que les premiers exemples de courbes rationnelles planes, et les mathématiciens se