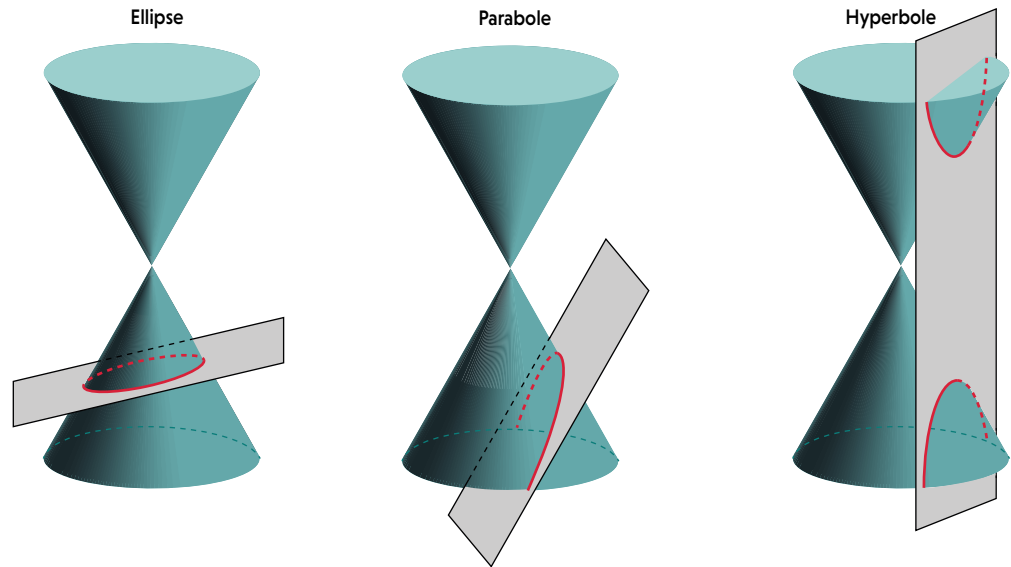


Les coniques (en rouge) sont les courbes nées de l'intersection d'un cône et d'un plan. Ces courbes peuvent être décrites par des équations polynomiales $F(x, y) = 0$ de degré 2. On peut aussi les représenter sous forme paramétrique, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de leurs points étant données par des fractions $P(t)/Q(t)$, où P et Q sont des polynômes en t de degré 2 au plus.



Par exemple, la droite passant par deux points A et B du plan, de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) , admet le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)x_A + tx_B, \\ y(t) &= (1-t)y_A + ty_B, \end{aligned}$$

de façon que quand le paramètre t décrit l'ensemble des nombres réels, le point $(x(t), y(t))$ décrit toute la droite (AB).

Le paramétrage d'une conique est plus subtil, mais se déduit d'une construction géométrique simple ; pour le cercle de centre O et de rayon 1, on obtient : $x(t) = (1-t^2)/(1+t^2)$, $y(t) = 2t/(1+t^2)$.

Les courbes rationnelles peuvent aussi être décrites par une équation $F(x, y) = 0$ où F est un polynôme en x et y . Cette équation polyno-

me sont bien sûr intéressés aux courbes rationnelles de degrés supérieurs.

En 1993, le mathématicien russe Maxim Kontsevich, aujourd'hui professeur permanent à l'IHES (Institut des hautes études scientifiques), près de Paris, a résolu une question qui se posait alors, et dont les droites et les coniques forment les deux premiers cas. Nous avons vu que par deux points, il ne passe qu'une seule droite, et que par cinq points, il ne passe qu'une seule conique. Il s'agissait de généraliser et de déterminer, pour tout entier positif d , le nombre N_d de courbes rationnelles planes de degré d passant par $3d-1$ points. Ces nombres sont des « invariants de Gromov-Witten », issus de considérations mathématiques plus générales inspirées par la théorie des cordes en physique, et nommés d'après Mikhaïl Gromov, qui travaille lui aussi à l'IHES, et Edward Witten, physicien-mathématicien de l'Institut d'études avancées de Princeton, aux États-Unis.

Plus précisément, Maxim Kontsevich a démontré la formule de récurrence, assez incroyable, selon laquelle N_d est égal à : $\sum (a^2 b^2 C(3d-4, 3a-2) - a^3 b C(3d-4, 3a-1)) N_a N_b$, où la somme $\sum$ porte sur tous les entiers positifs a et b tels que $a+b=d$ et où $C(p, q)$ désigne ici le coefficient binomial $p!/[q!(p-q)!]$, avec $p! = p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Compte tenu de $N_1 = 1$, cette formule permet de calculer tous les autres N_d de proche en proche. En particulier, on retrouve $N_2 = 1$ (comme Pascal l'avait prouvé en géométrie pure), $N_3 = 12$ (autrement dit, par 8 points donnés, il passe en général 12 courbes de degré 3, c'est-à-dire cubiques), $N_4 = 620$ (calculé par le mathématicien danois Hieronymus Zeuthen en 1873), $N_5 = 87304$ (qui avait été calculé juste avant que Maxim Kontsevich ne présente sa formule). Mais on obtient aussi les valeurs inédites :

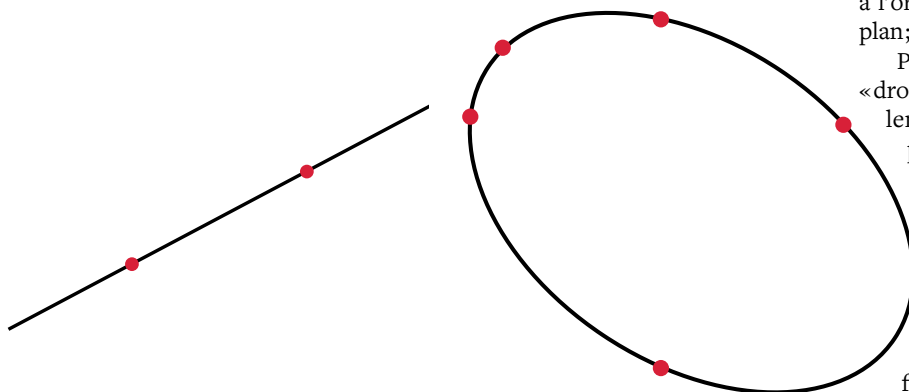
$N_6 = 26\,312\,976$, $N_7 = 14\,616\,808\,192$, $N_8 = 13\,525\,751\,027\,392$, etc.

L'entier $3d-1$ qui apparaît dans le problème résolu par Maxim Kontsevich peut sembler >

On cherchait le nombre de courbes rationnelles planes de degré d passant par $3d-1$ points

miale est de la forme $ax+by+c=0$ dans le cas d'une droite, et $x^2+y^2=R^2$ pour le cercle de rayon R centré en l'origine. Le degré d de F est le degré de la courbe rationnelle plane ; il est égal à 1 pour les droites, à 2 pour le cercle et les autres coniques.

Cependant, les droites et les coniques ne sont que les premiers exemples de courbes rationnelles planes, et les mathématiciens se



➤ mystérieux, mais, pour $d=1$ ou 2 , on trouve 1 ou 5 , le nombre de points qu'il s'agissait de fixer pour déterminer une droite ou une conique. Pour comprendre pourquoi, en général, $3d-1$ points déterminent un nombre fini de courbes rationnelles, on peut procéder à un décompte des paramètres à l'aide desquels les courbes sont décrites (voir l'encadré page 28).

Quelques années après ces travaux de Maxim Kontsevich, la géométrie des « courbes tropicales » a permis d'aborder la question sous un nouvel angle. Que sont ces objets ? Pour les introduire, revenons aux courbes rationnelles planes qui, comme la droite et le cercle, peuvent aussi être définies par une équation polynomiale $F(x, y)=0$ avec deux variables (ou coordonnées) x et y . Même si l'on continue à parler de courbe, les mathématiciens considèrent généralement, pour de multiples raisons, que ces deux coordonnées peuvent aussi prendre des valeurs complexes.

Dans ce cas, chaque coordonnée représente, de facto, deux coordonnées réelles, sa partie réelle (a dans un nombre $a+ib$) et sa partie imaginaire (b dans $a+ib$). Autrement dit, nous avons maintenant quatre coordonnées réelles, liées par une équation $F(x, y)=0$ qui équivaut en fait à deux équations, une première pour la partie réelle de F et une seconde pour sa partie imaginaire. Quatre coordonnées, deux relations : c'est plutôt une surface à laquelle on a affaire, dans un espace à quatre dimensions – quelque chose de délicat à visualiser !

L'étude des propriétés d'un tel objet est difficile en général, et divers outils et méthodes ont été élaborés dans ce contexte. Notamment, dans les années 1990, les mathématiciens d'origine russe Israel Gelfand, Mikhail Kapranov et Andrei Zelevinsky ont eu l'idée de visualiser à l'aide de coordonnées logarithmiques la taille des nombres complexes x et y qui sont solution d'une équation polynomiale $F(x, y)=0$. Plus précisément, l'idée est de tracer l'ensemble A_F des points de coordonnées $(u, v)=(\log|x|, \log|y|)$, où (x, y) parcourt toutes les solutions de l'équation $F(x, y)=0$ (la notation $|x|$ désigne le module de x : si $x=a+ib$, alors $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$, la distance

Par deux points, il passe une seule droite. Par cinq points, il passe une seule conique (ici, en l'occurrence, une ellipse). Pour les courbes de degré supérieur, il existe des relations analogues qui ont été démontrées récemment dans toute leur généralité. Une preuve passant par la géométrie tropicale a été donnée vers 2005.

à l'origine du point représentatif de x dans le plan ; c'est la valeur absolue de x si x est réel).

Prenons l'exemple, très simple, de la « droite » d'équation $x+y=1$ (on a mis des guillemets, car il faut se souvenir que x et y peuvent prendre des valeurs complexes, et donc que cette équation représente un objet géométrique plus compliqué, dans un espace à quatre dimensions). On cherche alors les couples de nombres réels $(u, v)=(\log|x|, \log|y|)$ tels que les nombres complexes x et y vérifient $x+y=1$. Dans ce cas, on peut faire le calcul relativement aisément. On trouve que les points (u, v) constituent le domaine du plan délimité par les trois courbes d'équations $v=\log(e^u+1)$ pour tout u , $v=\log(1-e^u)$ pour $u<0$ et $v=\log(e^u-1)$ pour $u>0$ (voir la figure page ci-contre).

D'UNE ÉQUATION POLYNOMIALE À SON AMIBE

Ce domaine présente des sortes de tentacules, caractéristique que l'on retrouve pour les autres équations (ou courbes) $F(x, y)=0$ et qui explique pourquoi les ensembles A_F ont été appelés « amibes ».

Que sont, justement, les trois tentacules de l'amibe de la droite $x+y=1$? Ils correspondent aux points de cette droite dont les coordonnées sont soit très grandes ($\log|x|$ tend vers $+\infty$), soit au contraire très petites ($\log|x|$ tend vers $-\infty$). Ainsi, le tentacule du haut à droite correspond

On « tropicalise » un polynôme en remplaçant l'opération $+$ par $\max$, et l'opération $\times$ par $+$

aux points dont les coordonnées (x, y) sont toutes deux grandes ; dans ce cas, la constante 1 est négligeable devant x et y , et l'équation $x+y=1$ se simplifie en $x \approx -y$; en particulier, on a $|x| \approx |y|$ et l'on voit pourquoi ce tentacule s'approche de la diagonale d'équation $v=u$. Le tentacule de gauche correspond au cas où x est petit : dans ce cas, $y=1-x$ est proche de 1 et $v=\log|y|$ est proche de 0 . De la même façon, le tentacule du bas correspond au cas où y est petit.

Sur la figure, on a aussi représenté le « squelette » de l'amibe ; pour $x+y=1$, il est constitué