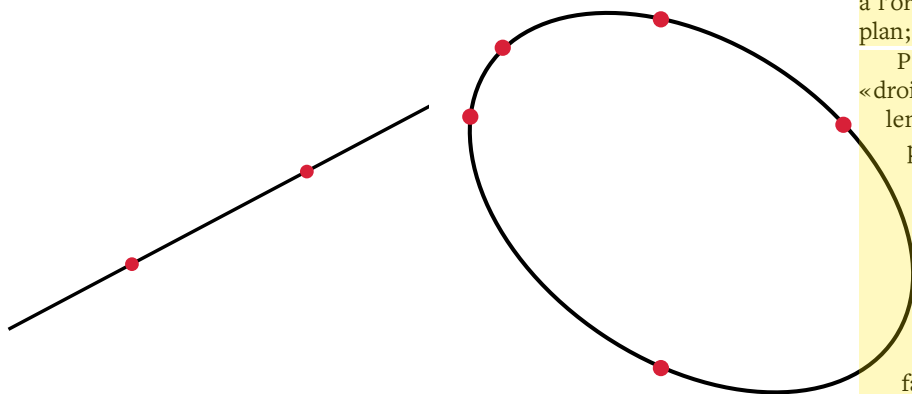




> mystérieux, mais, pour $d=1$ ou 2 , on trouve 1 ou 5 , le nombre de points qu'il s'agissait de fixer pour déterminer une droite ou une conique. Pour comprendre pourquoi, en général, $3d-1$ points déterminent un nombre fini de courbes rationnelles, on peut procéder à un décompte des paramètres à l'aide desquels les courbes sont décrites (voir l'encadré page 28).

Quelques années après ces travaux de Maxim Kontsevich, la géométrie des « courbes tropicales » a permis d'aborder la question sous un nouvel angle. Que sont ces objets ? Pour les introduire, revenons aux courbes rationnelles planes qui, comme la droite et le cercle, peuvent aussi être définies par une équation polynomiale $F(x, y)=0$ avec deux variables (ou coordonnées) x et y . Même si l'on continue à parler de courbe, les mathématiciens considèrent généralement, pour de multiples raisons, que ces deux coordonnées peuvent aussi prendre des valeurs complexes.

Dans ce cas, chaque coordonnée représente, de facto, deux coordonnées réelles, sa partie réelle (a dans un nombre $a+ib$) et sa partie imaginaire (b dans $a+ib$). Autrement dit, nous avons maintenant quatre coordonnées réelles, liées par une équation $F(x, y)=0$ qui équivaut en fait à deux équations, une première pour la partie réelle de F et une seconde pour sa partie imaginaire. Quatre coordonnées, deux relations : c'est plutôt une surface à laquelle on a affaire, dans un espace à quatre dimensions – quelque chose de délicat à visualiser !

L'étude des propriétés d'un tel objet est difficile en général, et divers outils et méthodes ont été élaborés dans ce contexte. Notamment, dans les années 1990, les mathématiciens d'origine russe Israel Gelfand, Mikhail Kapranov et Andrei Zelevinsky ont eu l'idée de visualiser à l'aide de coordonnées logarithmiques la taille des nombres complexes x et y qui sont solution d'une équation polynomiale $F(x, y)=0$. Plus précisément, l'idée est de tracer l'ensemble A_F des points de coordonnées $(u, v)=(\log|x|, \log|y|)$, où (x, y) parcourt toutes les solutions de l'équation $F(x, y)=0$ (la notation $|x|$ désigne le module de x : si $x=a+ib$, alors $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$, la distance

à l'origine du point représentatif de x dans le plan ; c'est la valeur absolue de x si x est réel).

Prenons l'exemple, très simple, de la « droite » d'équation $x+y=1$ (on a mis des guillemets, car il faut se souvenir que x et y peuvent prendre des valeurs complexes, et donc que cette équation représente un objet géométrique plus compliqué, dans un espace à quatre dimensions). On cherche alors les couples de nombres réels $(u, v)=(\log|x|, \log|y|)$ tels que les nombres complexes x et y vérifient $x+y=1$. Dans ce cas, on peut faire le calcul relativement aisément. On trouve que les points (u, v) constituent le domaine du plan délimité par les trois courbes d'équations $v=\log(e^u+1)$ pour tout u , $v=\log(1-e^u)$ pour $u<0$ et $v=\log(e^u-1)$ pour $u>0$ (voir la figure page ci-contre).

D'UNE ÉQUATION POLYNOMIALE À SON AMIBE

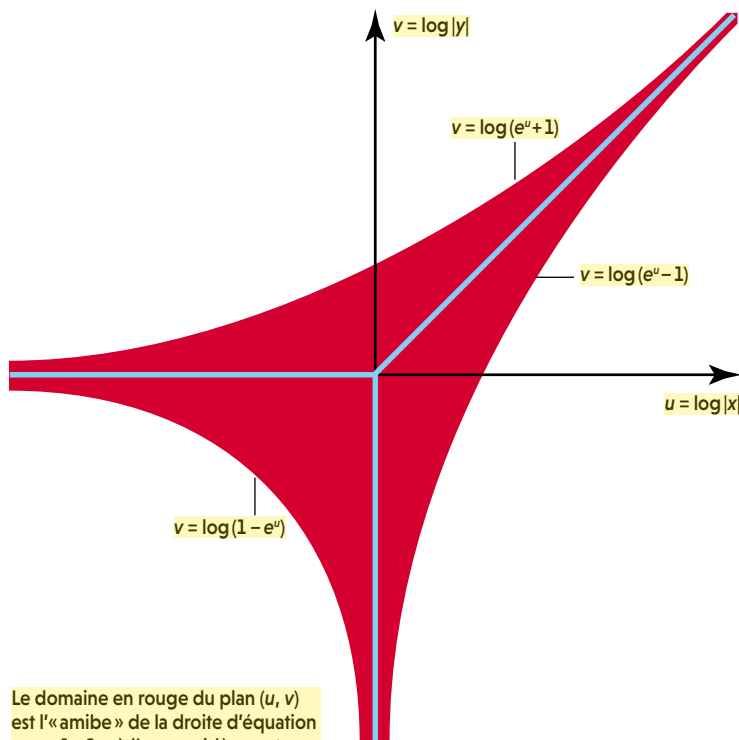
Ce domaine présente des sortes de tentacules, caractéristique que l'on retrouve pour les autres équations (ou courbes) $F(x, y)=0$ et qui explique pourquoi les ensembles A_F ont été appelés « amibes ».

Que sont, justement, les trois tentacules de l'amibe de la droite $x+y=1$? Ils correspondent aux points de cette droite dont les coordonnées sont soit très grandes ($\log|x|$ tend vers $+\infty$), soit au contraire très petites ($\log|x|$ tend vers $-\infty$). Ainsi, le tentacule du haut à droite correspond

On « tropicalise » un polynôme en remplaçant l'opération $+$ par $\max$, et l'opération $\times$ par $+$

aux points dont les coordonnées (x, y) sont toutes deux grandes ; dans ce cas, la constante 1 est négligeable devant x et y , et l'équation $x+y=1$ se simplifie en $x \approx -y$; en particulier, on a $|x| \approx |y|$ et l'on voit pourquoi ce tentacule s'approche de la diagonale d'équation $v=u$. Le tentacule de gauche correspond au cas où x est petit : dans ce cas, $y=1-x$ est proche de 1 et $v=\log|y|$ est proche de 0 . De la même façon, le tentacule du bas correspond au cas où y est petit.

Sur la figure, on a aussi représenté le « squelette » de l'amibe ; pour $x+y=1$, il est constitué



Le domaine en rouge du plan (u, v) est l'«amibe» de la droite d'équation $x + y - 1 = 0$, où l'on considère x et y comme des variables complexes. Son squelette (en bleu) est la «droite tropicale» correspondant au polynôme $x + y - 1$. Cette droite tropicale est donnée par les points (u, v) pour lesquels le maximum $\max(u, v, 0)$ est atteint en au moins deux de ces trois arguments u, v et 0 .

de trois demi-droites issues de l'origine. Une première façon de comprendre ce squelette, mise en avant par plusieurs mathématiciens, en particulier les Russes Victor Maslov et Oleg Viro, consiste à changer d'échelle et à tracer la même amibe en remplaçant le logarithme naturel (népérien, de base $e = 2,718...$) par un logarithme de base supérieure. L'amibe se contracte alors autour de son squelette (voir la figure ci-dessous).

QUAND L'ALGÈBRE TROPICALE POINTE SON NEZ...

Il y a une façon plus algébrique de comprendre ce processus. La fonction logarithme transforme une multiplication en addition: si $z = xy$, on a $\log z = \log x + \log y$. Ainsi, si l'on note $u = \log x$, $v = \log y$ et $w = \log z$, on a $w = u + v$.

En même temps, la loi d'addition devient plus étrange: si $z = x + y$, on a $\log z = \log(x + y) = \log(e^{\log x} + e^{\log y})$, c'est-à-dire $w = \log(e^u + e^v)$.

Mais cette étrangeté se simplifie lorsqu'on va au bout du changement d'échelle: pour un

logarithme de base b , cette formule devient $w = \log_b(b^u + b^v)$ et son membre de droite converge, lorsque b tend vers l'infini, vers le plus grand des deux nombres u et v , c'est-à-dire que l'on a, dans cette limite, $w = \max(u, v)$.

Autrement dit, poussé à son terme, le changement d'échelle de Maslov et Viro déforme les lois familières d'addition (+) et de multiplication ($\times$) vers les «lois exotiques» max et +, respectivement. Nous entrons enfin dans le domaine qui fait l'objet de cet article, car ces deux dernières lois définissent ce qu'on appelle aujourd'hui l'algèbre tropicale, et plus anciennement l'algèbre max-plus.

On peut traduire dans cette algèbre n'importe quelle expression polynomiale, en remplaçant l'opération + par l'opération max, et l'opération $\times$ par l'addition usuelle, comme si l'on prenait le logarithme selon la procédure ci-dessus. Un monôme de la forme ax^n sera ainsi traduit en l'expression $\log|a| + nu$, et un polynôme tel que $-2 + 5x^2 + (-4)y^3$ sera ainsi traduit en $\max(\log 2, \log 5 + 2u, \log 4 + 3v)$.

DES AMIBES AUX COURBES TROPICALES

Appliquons cette règle à l'équation de notre droite-modèle, écrite sous la forme $x + y - 1 = 0$, en traduisant le membre de gauche dans cette algèbre tropicale. On obtient alors l'expression $\max(u, v, 0)$, qui fournit la clé de la compréhension du squelette de notre amibe. En effet, les trois demi-droites qui constituent ce squelette correspondent exactement aux points de coordonnées (u, v) telles que le maximum de u, v et 0 est atteint en au moins deux de ces trois arguments (par exemple, si le maximum est atteint pour les deux premiers des trois arguments u, v et 0 , cela signifie que $u = v$ et que $u > 0, v > 0$: c'est la demi-droite diagonale du squelette). Ce squelette est la «courbe tropicale» correspondant à l'équation $x + y - 1 = 0$.

Ces considérations se généralisent à toute équation polynomiale, à laquelle on peut donc associer une amibe et son squelette, c'est-à-dire la courbe tropicale correspondante. La compréhension de ces amibes et de leurs squelettes, pour des polynômes F plus généraux que l'exemple choisi ici, constitue un difficile sujet ➤

Quand on augmente la base du logarithme utilisé pour calculer l'amibe (ici celle de l'équation $x + y - 1 = 0$), l'amibe se contracte. À la limite où la base tend vers l'infini, l'amibe se réduit à son squelette.

