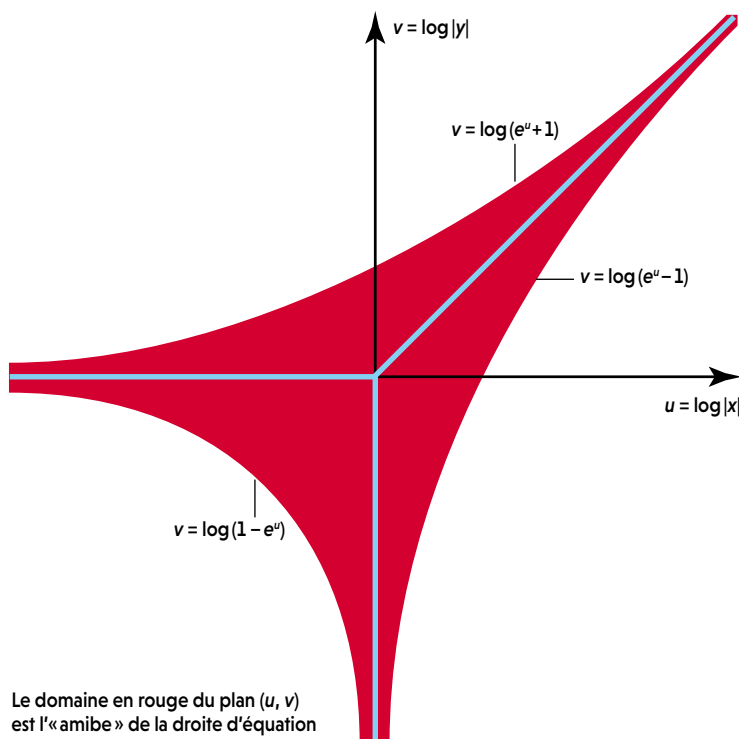




Le domaine en rouge du plan (u, v) est l'«amibe» de la droite d'équation $x+y-1=0$, où l'on considère x et y comme des variables complexes. Son squelette (en bleu) est la «droite tropicale» correspondant au polynôme $x+y-1$. Cette droite tropicale est donnée par les points (u, v) pour lesquels le maximum $\max(u, v, 0)$ est atteint en au moins deux de ces trois arguments u, v et 0 .

de trois demi-droites issues de l'origine. Une première façon de comprendre ce squelette, mise en avant par plusieurs mathématiciens, en particulier les Russes Victor Maslov et Oleg Viro, consiste à changer d'échelle et à tracer la même amibe en remplaçant le logarithme naturel (népérien, de base $e=2,718...$) par un logarithme de base supérieure. L'amibe se contracte alors autour de son squelette (voir la figure ci-dessous).

QUAND L'ALGÈBRE TROPICALE POINTE SON NEZ...

Il y a une façon plus algébrique de comprendre ce processus. La fonction logarithme transforme une multiplication en addition: si $z=xy$, on a $\log z = \log x + \log y$. Ainsi, si l'on note $u = \log x$, $v = \log y$ et $w = \log z$, on a $w = u + v$.

En même temps, la loi d'addition devient plus étrange: si $z = x + y$, on a $\log z = \log(x+y) = \log(e^{\log x} + e^{\log y})$, c'est-à-dire $w = \log(e^u + e^v)$.

Mais cette étrangeté se simplifie lorsqu'on va au bout du changement d'échelle: pour un

logarithme de base b , cette formule devient $w = \log_b(b^u + b^v)$ et son membre de droite converge, lorsque b tend vers l'infini, vers le plus grand des deux nombres u et v , c'est-à-dire que l'on a, dans cette limite, $w = \max(u, v)$.

Autrement dit, poussé à son terme, le changement d'échelle de Maslov et Viro déforme les lois familières d'addition (+) et de multiplication ($\times$) vers les «lois exotiques» max et +, respectivement. Nous entrons enfin dans le domaine qui fait l'objet de cet article, car ces deux dernières lois définissent ce qu'on appelle aujourd'hui l'algèbre tropicale, et plus anciennement l'algèbre max-plus.

On peut traduire dans cette algèbre n'importe quelle expression polynomiale, en remplaçant l'opération + par l'opération max, et l'opération $\times$ par l'addition usuelle, comme si l'on prenait le logarithme selon la procédure ci-dessus. Un monôme de la forme ax^n sera ainsi traduit en l'expression $\log|a| + nu$, et un polynôme tel que $-2 + 5x^2 + (-4)y^3$ sera ainsi traduit en $\max(\log 2, \log 5 + 2u, \log 4 + 3v)$.

DES AMIBES AUX COURBES TROPICALES

Appliquons cette règle à l'équation de notre droite-modèle, écrite sous la forme $x+y-1=0$, en traduisant le membre de gauche dans cette algèbre tropicale. On obtient alors l'expression $\max(u, v, 0)$, qui fournit la clé de la compréhension du squelette de notre amibe. En effet, les trois demi-droites qui constituent ce squelette correspondent exactement aux points de coordonnées (u, v) telles que le maximum de u, v et 0 est atteint en au moins deux de ces trois arguments (par exemple, si le maximum est atteint pour les deux premiers des trois arguments u, v et 0 , cela signifie que $u=v$ et que $u>0, v>0$: c'est la demi-droite diagonale du squelette). Ce squelette est la «courbe tropicale» correspondant à l'équation $x+y-1=0$.

Ces considérations se généralisent à toute équation polynomiale, à laquelle on peut donc associer une amibe et son squelette, c'est-à-dire la courbe tropicale correspondante. La compréhension de ces amibes et de leurs squelettes, pour des polynômes F plus généraux que l'exemple choisi ici, constitue un difficile sujet ➤

Quand on augmente la base du logarithme utilisé pour calculer l'amibe (ici celle de l'équation $x+y-1=0$), l'amibe se contracte. À la limite où la base tend vers l'infini, l'amibe se réduit à son squelette.

