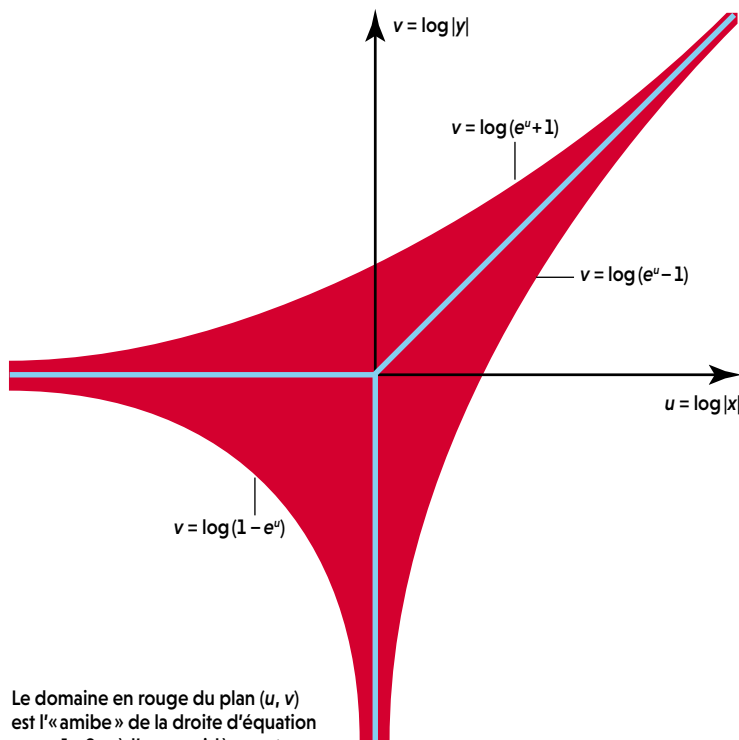




Le domaine en rouge du plan (u, v) est l'«amibe» de la droite d'équation $x+y-1=0$, où l'on considère x et y comme des variables complexes. Son squelette (en bleu) est la «droite tropicale» correspondant au polynôme $x+y-1$. Cette droite tropicale est donnée par les points (u, v) pour lesquels le maximum $\max(u, v, 0)$ est atteint en au moins deux de ces trois arguments u, v et 0 .

de trois demi-droites issues de l'origine. Une première façon de comprendre ce squelette, mise en avant par plusieurs mathématiciens, en particulier les Russes Victor Maslov et Oleg Viro, consiste à changer d'échelle et à tracer la même amibe en remplaçant le logarithme naturel (népérien, de base $e=2,718...$) par un logarithme de base supérieure. L'amibe se contracte alors autour de son squelette (voir la figure ci-dessous).

QUAND L'ALGÈBRE TROPICALE POINTE SON NEZ...

Il y a une façon plus algébrique de comprendre ce processus. La fonction logarithme transforme une multiplication en addition: si $z=xy$, on a $\log z = \log x + \log y$. Ainsi, si l'on note $u = \log x$, $v = \log y$ et $w = \log z$, on a $w = u + v$.

En même temps, la loi d'addition devient plus étrange: si $z = x + y$, on a $\log z = \log(x+y) = \log(e^{\log x} + e^{\log y})$, c'est-à-dire $w = \log(e^u + e^v)$.

Mais cette étrangeté se simplifie lorsqu'on va au bout du changement d'échelle: pour un

logarithme de base b , cette formule devient $w = \log_b(b^u + b^v)$ et son membre de droite converge, lorsque b tend vers l'infini, vers le plus grand des deux nombres u et v , c'est-à-dire que l'on a, dans cette limite, $w = \max(u, v)$.

Autrement dit, poussé à son terme, le changement d'échelle de Maslov et Viro déforme les lois familières d'addition (+) et de multiplication ($\times$) vers les «lois exotiques» max et +, respectivement. Nous entrons enfin dans le domaine qui fait l'objet de cet article, car ces deux dernières lois définissent ce qu'on appelle aujourd'hui l'algèbre tropicale, et plus anciennement l'algèbre max-plus.

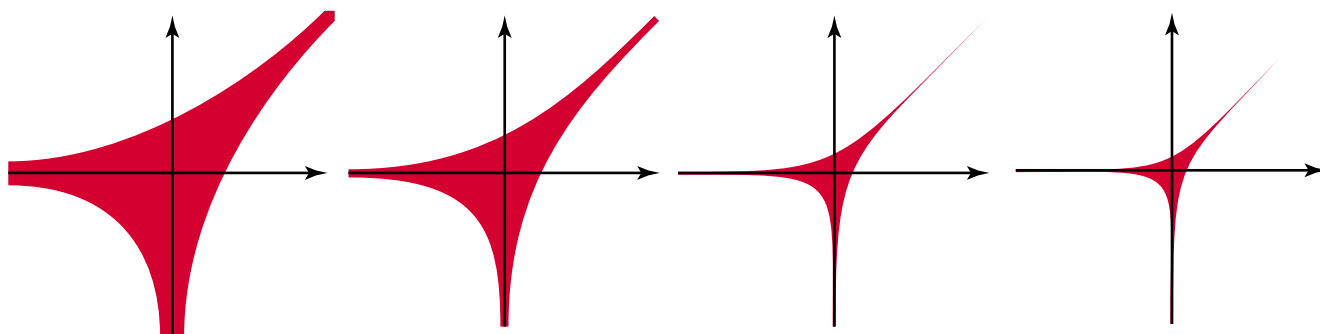
On peut traduire dans cette algèbre n'importe quelle expression polynomiale, en remplaçant l'opération + par l'opération max, et l'opération $\times$ par l'addition usuelle, comme si l'on prenait le logarithme selon la procédure ci-dessus. Un monôme de la forme ax^n sera ainsi traduit en l'expression $\log|a| + nu$, et un polynôme tel que $-2 + 5x^2 + (-4)y^3$ sera ainsi traduit en $\max(\log 2, \log 5 + 2u, \log 4 + 3v)$.

DES AMIBES AUX COURBES TROPICALES

Appliquons cette règle à l'équation de notre droite-modèle, écrite sous la forme $x+y-1=0$, en traduisant le membre de gauche dans cette algèbre tropicale. On obtient alors l'expression $\max(u, v, 0)$, qui fournit la clé de la compréhension du squelette de notre amibe. En effet, les trois demi-droites qui constituent ce squelette correspondent exactement aux points de coordonnées (u, v) telles que le maximum de u, v et 0 est atteint en au moins deux de ces trois arguments (par exemple, si le maximum est atteint pour les deux premiers des trois arguments u, v et 0 , cela signifie que $u=v$ et que $u>0, v>0$: c'est la demi-droite diagonale du squelette). Ce squelette est la «courbe tropicale» correspondant à l'équation $x+y-1=0$.

Ces considérations se généralisent à toute équation polynomiale, à laquelle on peut donc associer une amibe et son squelette, c'est-à-dire la courbe tropicale correspondante. La compréhension de ces amibes et de leurs squelettes, pour des polynômes F plus généraux que l'exemple choisi ici, constitue un difficile sujet ➤

Quand on augmente la base du logarithme utilisé pour calculer l'amibe (ici celle de l'équation $x+y-1=0$), l'amibe se contracte. À la limite où la base tend vers l'infini, l'amibe se réduit à son squelette.



➤ de recherches actuelles. Même obtenir une représentation graphique précise de ces objets n'est pas si aisé.

L'un des résultats connus, et que l'on peut constater dans notre exemple, est que la région du plan complémentaire de l'amibe est une réunion d'un nombre fini de domaines convexes. Autrement dit, étant donnés deux points hors de l'amibe, soit on peut les relier par un segment qui ne touche pas l'amibe, soit on ne peut même pas les relier par une courbe continue.

Prenons un autre exemple, un peu plus compliqué : le polynôme $F(x, y) = 1 + 2xy + x^3 + y^3$. Comme on l'a fait plus haut, la tropicalisation de F est définie en interprétant F dans l'algèbre tropicale et en prenant les logarithmes des coefficients. On obtient :

$$F_{\text{trop}}(u, v) = \max(0, \log 2 + u + v, 3u, 3v).$$

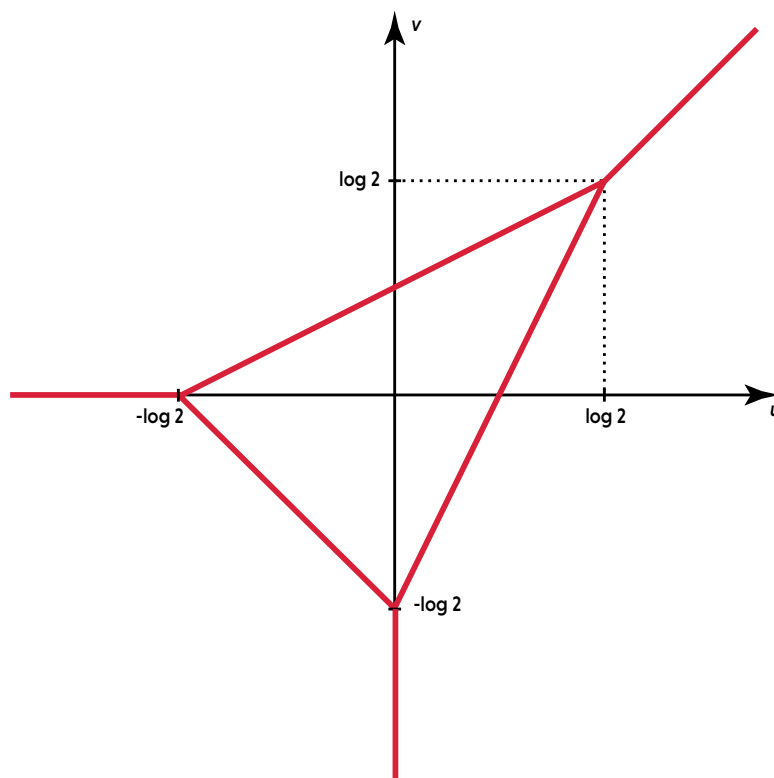
La « courbe tropicale » correspondante (voir la figure ci-contre) est définie comme précédemment : c'est l'ensemble des (u, v) pour lesquels ce maximum est atteint en deux termes au moins (c'est-à-dire en au moins deux des arguments $0, \log 2 + u + v, 3u$ et $3v$).

Comme dans l'exemple précédent, cette courbe tropicale est un ensemble linéaire par morceaux, constitué ici de trois segments et de trois demi-droites. Cette linéarité par morceaux est une propriété générale des courbes tropicales. Une autre, un peu plus difficile à décrire, est une condition d'équilibre en chacun des points multiples, où se rejoignent plusieurs lignes. Chaque branche issue d'un tel point a un vecteur directeur primitif, c'est-à-dire que ses deux coordonnées sont des entiers premiers entre eux ; la théorie lui attribue également un poids, qui est un nombre entier positif. La condition d'équilibre stipule qu'en chaque sommet, la somme de ces vecteurs primitifs, pondérée par leurs poids, est nulle.

Pourquoi s'intéresser aux courbes tropicales ? L'un de leurs attraits est qu'elles ont des propriétés de nature essentiellement combinatoire, tout en reflétant assez fidèlement la géométrie des « courbes » algébriques sous-jacentes, ces objets définis par des équations polynomiales $F(x, y) = 0$ où x et y sont des coordonnées complexes.

DES APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Au cours des dernières années, de nombreux mathématiciens ont étendu des théorèmes classiques de la géométrie algébrique au contexte de la géométrie tropicale. Il en est ainsi du « théorème de Bézout » qui établit que le nombre de points d'intersection de deux courbes tropicales est égal au produit de leurs degrés (voir la figure page suivante). Bien que plus élémentaire que l'énoncé correspondant en géométrie algébrique, la variante tropicale en fournit un raffinement, car, outre le nombre de points



UNE COURBE TROPICALE

Cette figure linéaire par morceaux est la « courbe tropicale » associée au polynôme $F(x, y) = 1 + 2xy + x^3 + y^3$. Elle correspond à l'ensemble des points (u, v) du plan tels que le maximum de $0, \log 2 + u + v, 3u, 3v$ est atteint en au moins deux de ces quatre arguments.

d'intersection, le théorème fournit aussi des informations sur leurs positions.

De façon plus importante, la géométrie tropicale a permis de fournir de nouvelles démonstrations, plus simples, de résultats difficiles.

La première application concernait les invariants de Gromov-Witten, les nombres N_d mentionnés au début de cet article. On doit en effet à Grigory Mikhalkin, de l'université de Genève, un remarquable « principe de correspondance », qui établit pour l'essentiel une bijection entre les courbes algébriques de degré d et leurs analogues tropicales. Par ailleurs, Andreas Gathmann et Hannah Markwig, à l'université de Kaiserslautern, en Allemagne, ont prouvé vers 2005 l'analogie tropicale de la formule de Kontsevich. La combinaison de ces deux travaux fournit ainsi une nouvelle démonstration de la relation de récurrence de Kontsevich.

Ces techniques tropicales avaient aussi permis de calculer les analogues, en géométrie réelle, des invariants de Gromov-Witten. Ils portent toujours sur des courbes, mais on impose maintenant que les coefficients des équations de celles-ci soient des nombres réels, et non plus des nombres complexes. Le décompte de ces courbes est en général très mystérieux, mais Jean-Yves Welschinger,