

> de recherches actuelles. Même obtenir une représentation graphique précise de ces objets n'est pas si aisé.

L'un des résultats connus, et que l'on peut constater dans notre exemple, est que la région du plan complémentaire de l'amibe est une réunion d'un nombre fini de domaines convexes. Autrement dit, étant donnés deux points hors de l'amibe, soit on peut les relier par un segment qui ne touche pas l'amibe, soit on ne peut même pas les relier par une courbe continue.

Prenons un autre exemple, un peu plus compliqué : le polynôme $F(x, y) = 1 + 2xy + x^3 + y^3$. Comme on l'a fait plus haut, la tropicalisation de F est définie en interprétant F dans l'algèbre tropicale et en prenant les logarithmes des coefficients. On obtient :

$$F_{\text{trop}}(u, v) = \max(0, \log 2 + u + v, 3u, 3v).$$

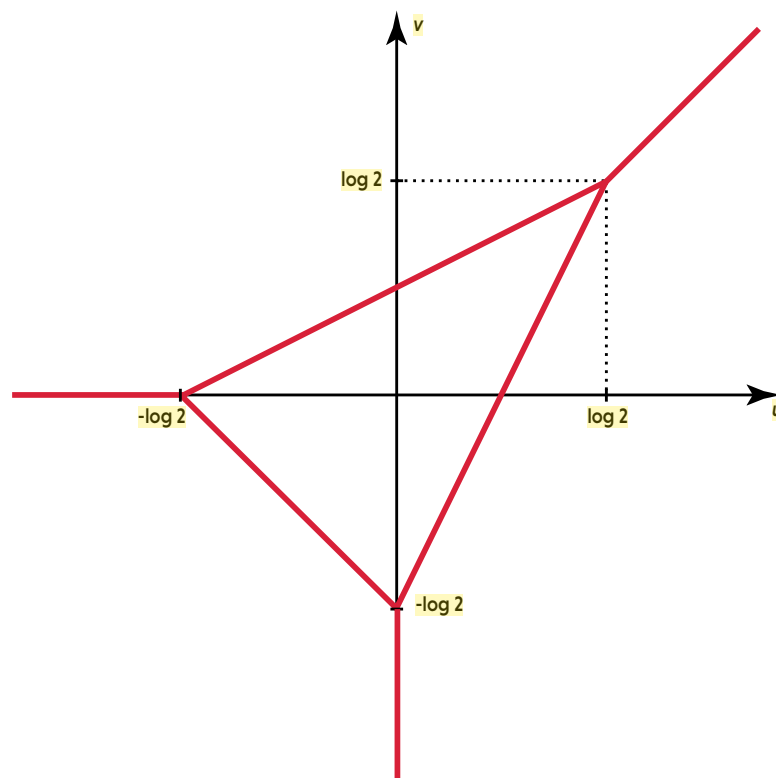
La « courbe tropicale » correspondante (voir la figure ci-contre) est définie comme précédemment : c'est l'ensemble des (u, v) pour lesquels ce maximum est atteint en deux termes au moins (c'est-à-dire en au moins deux des arguments $0, \log 2 + u + v, 3u$ et $3v$).

Comme dans l'exemple précédent, cette courbe tropicale est un ensemble linéaire par morceaux, constitué ici de trois segments et de trois demi-droites. Cette linéarité par morceaux est une propriété générale des courbes tropicales. Une autre, un peu plus difficile à décrire, est une condition d'équilibre en chacun des points multiples, où se rejoignent plusieurs lignes. Chaque branche issue d'un tel point a un vecteur directeur primitif, c'est-à-dire que ses deux coordonnées sont des entiers premiers entre eux ; la théorie lui attribue également un poids, qui est un nombre entier positif. La condition d'équilibre stipule qu'en chaque sommet, la somme de ces vecteurs primitifs, pondérée par leurs poids, est nulle.

Pourquoi s'intéresser aux courbes tropicales ? L'un de leurs attraits est qu'elles ont des propriétés de nature essentiellement combinatoire, tout en reflétant assez fidèlement la géométrie des « courbes » algébriques sous-jacentes, ces objets définis par des équations polynomiales $F(x, y) = 0$ où x et y sont des coordonnées complexes.

DES APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Au cours des dernières années, de nombreux mathématiciens ont étendu des théorèmes classiques de la géométrie algébrique au contexte de la géométrie tropicale. Il en est ainsi du « théorème de Bézout » qui établit que le nombre de points d'intersection de deux courbes tropicales est égal au produit de leurs degrés (voir la figure page suivante). Bien que plus élémentaire que l'énoncé correspondant en géométrie algébrique, la variante tropicale en fournit un raffinement, car, outre le nombre de points



UNE COURBE TROPICALE

Cette figure linéaire par morceaux est la « courbe tropicale » associée au polynôme $F(x, y) = 1 + 2xy + x^3 + y^3$. Elle correspond à l'ensemble des points (u, v) du plan tels que le maximum de $0, \log 2 + u + v, 3u, 3v$ est atteint en au moins deux de ces quatre arguments.

d'intersection, le théorème fournit aussi des informations sur leurs positions.

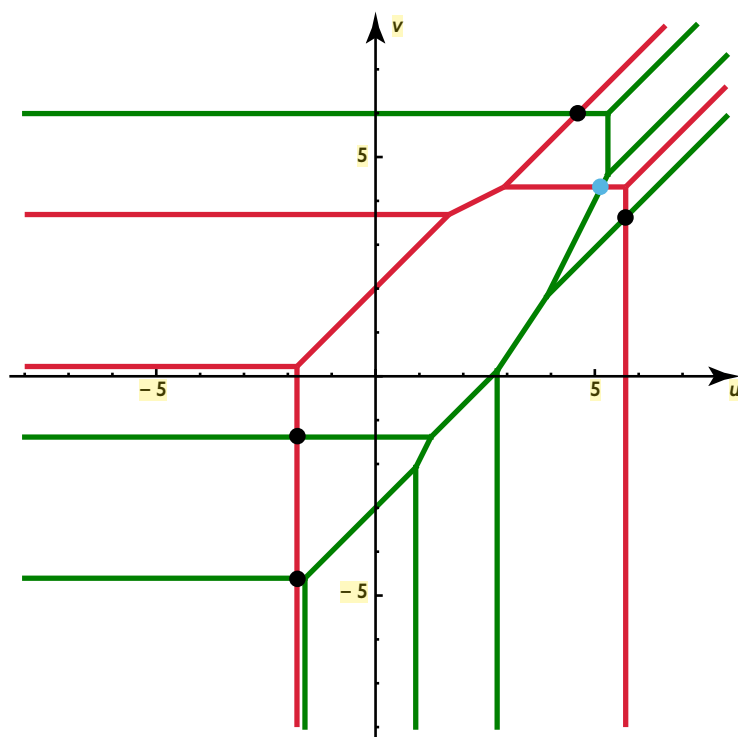
De façon plus importante, la géométrie tropicale a permis de fournir de nouvelles démonstrations, plus simples, de résultats difficiles.

La première application concernait les invariants de Gromov-Witten, les nombres N_d mentionnés au début de cet article. On doit en effet à Grigory Mikhalkin, de l'université de Genève, un remarquable « principe de correspondance », qui établit pour l'essentiel une bijection entre les courbes algébriques de degré d et leurs analogues tropicales. Par ailleurs, Andreas Gathmann et Hannah Markwig, à l'université de Kaiserslautern, en Allemagne, ont prouvé vers 2005 l'analogie tropicale de la formule de Kontsevich. La combinaison de ces deux travaux fournit ainsi une nouvelle démonstration de la relation de récurrence de Kontsevich.

Ces techniques tropicales avaient aussi permis de calculer les analogues, en géométrie réelle, des invariants de Gromov-Witten. Ils portent toujours sur des courbes, mais on impose maintenant que les coefficients des équations de celles-ci soient des nombres réels, et non plus des nombres complexes. Le décompte de ces courbes est en général très mystérieux, mais Jean-Yves Welschinger,

INTERSECTION DE COURBES TROPICALES

Comme pour des courbes algébriques classiques, le nombre de points d'intersection de deux courbes tropicales est égal, en général, au produit de leurs degrés. Ici, la conique tropicale (degré 2) associée au polynôme $x^2 + 4xy - 300x - 40y - 50$ (en rouge) croise la cubique tropicale (degré 3) liée au polynôme $x^3/8 + x^2y + 2xy^2 + y^3 + 2x^2 + 15xy + 400y^2 + 5x + 100y + 1$ (en vert) en $2 \times 3 = 6$ points (on montre que le point d'intersection bleu, proche de (5, 5), est de multiplicité 2 : il compte double).



Payne, à l'université Yale, ont pu démontrer pour certaines familles de courbes algébriques (celles de « genres » 22 et 23) une propriété, jusque-là inconnue, de leurs espaces de paramètres, à savoir qu'ils sont « de type général ». La conséquence la plus simple est qu'il n'est pas possible, pour ces genres-là, de décrire toutes les courbes algébriques uniquement à l'aide de fonctions rationnelles (de plusieurs variables).

DÉFORMER L'OBJET D'ÉTUDE JUSQU'À LE RENDRE DÉGÉNÉRÉ

La raison de l'efficacité de la géométrie tropicale, branche toute neuve, presque balbutiante, est encore un peu mystérieuse, mais rappelons-nous que les courbes tropicales sont, justement, des dégénérescences (lorsque la base des logarithmes tend vers l'infini) d'amibes de courbes algébriques. Ainsi, la géométrie tropicale met implicitement en œuvre un mécanisme omniprésent en géométrie moderne : déformer l'objet d'étude jusqu'à le rendre « dégénéré » et vérifier que certaines propriétés restent conservées tout au long de la déformation, y compris à son aboutissement. Mais ce faisant, elle fournit des modèles combinatoires plus simples pour la dégénérescence, et permet ainsi non seulement de revenir sur des questions classiques de géométrie algébrique, mais aussi de les dépasser.

La suite de l'histoire reste à écrire. Mais pour terminer, répondons à une question qui n'aura pas manqué d'intriguer les lectrices et lecteurs : pourquoi l'adjectif « tropical » qualifie-t-il l'algèbre et la géométrie dont on a esquissé ici quelques éléments ? En mathématiques, beaucoup de termes sont tirés du langage courant sans que leur sens technique ait un rapport évident ou pertinent avec leur sens courant. C'est le cas ici. L'algèbre formée en utilisant les opérations max et + au lieu des opérations + et × avait été nommée algèbre exotique, puis algèbre max-plus jusqu'à la fin des années 1980. Elle est devenue depuis « algèbre tropicale » sous l'impulsion de quelques chercheurs en informatique théorique de l'université Paris-VII, qui ont voulu rendre hommage à leur collègue brésilien Imre Simon, pionnier du domaine. L'exotisme a des facettes diverses ! ■

aujourd'hui à l'université de Lyon, avait découvert en 2002 qu'il convenait de les compter certaines positivement et les autres négativement, définissant ainsi des invariants W_d analogues aux entiers N_d .

Pour ces nombres, Ilia Itenberg (Sorbonne Université et École normale supérieure, à Paris), Viatcheslav Kharlamov (université de Strasbourg) et Eugenii Shustin (université de Tel-Aviv) ont pu établir en 2009 une relation de récurrence d'où il découle, par exemple, que $W_3 = 8$, $W_4 = 240$, etc. Autrement dit, s'il y a $N_3 = 12$ cubiques rationnelles passant par 8 points généraux réels, seules $W_3 = 8$ sont réelles. Compte tenu de la règle de comptage « avec signes », cela signifie en fait qu'il y en a 8 (toutes comptées avec le même signe), 10 (une a un signe opposé des neuf autres) ou 12 (deux ont un signe opposé des dix autres) ; le nombre précis dépend des positions des 8 points choisis.

Plus récemment encore, la géométrie tropicale a fourni une clé pour accéder à certaines propriétés des courbes algébriques, planes ou non, ainsi qu'à des propriétés de certains espaces, introduits par Bernhard Riemann au milieu du XIX^e siècle, qui paramétrisent toutes ces courbes algébriques de façon naturelle. Par exemple, en 2012, Filip Cools, Jan Draisma, Sam Payne et Elina Robeva ont pu reprouver, par les outils de la géométrie tropicale, une conjecture d'Alexander von Brill et Max Noether énoncée en 1874 et dont la première démonstration datait de 1980. Et il y a quelques mois, David Jensen, à l'université du Kentucky, et Sam

BIBLIOGRAPHIE

J. Rau, **A first expedition to tropical geometry**, 2017 (<https://bit.ly/2o6Bzn2>).

E. Brugallé et K. Shaw, **A bit of tropical geometry**, 2014 (<https://arxiv.org/abs/1311.2360>).

I. Itenberg, **Droites tropicales**, *Images des Mathématiques*, CNRS, 2011 (<http://images.math.cnrs.fr/Droites-tropicales.html>).

I. Itenberg, **Géométrie tropicale et dénombrement de courbes**, dans *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, vol. 4, pp. 107-125 (éd. : F. Bayart et E. Charpentier), Cassini, 2010.

G. Cohen et al., **L'algèbre des sandwiches**, *Pour la Science* n° 328, pp. 56-63, février 2005.

J. Richter-Gebert et al., **First steps in tropical geometry**, 2003 (<https://arxiv.org/abs/math/0306366>).



Un crocodile américain (*Crocodylus acutus*) aux dents impressionnantes croise nonchalamment dans les eaux de l'archipel des Jardines de la Reina, au sud de Cuba.