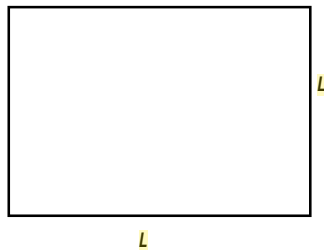


COMMENT ON CONSTRUIT UN SYSTÈME COHÉRENT D'UNITÉS

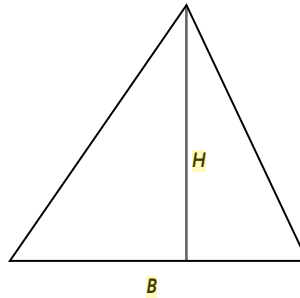
Deux voies existent pour mathématiser un domaine scientifique, l'une théorique, l'autre expérimentale. Pour articuler harmonieusement ces deux voies et bénéficier de la puissance du

calcul symbolique, l'on introduit des constantes fondamentales. Voyons (sans aucune prétention historique) comment s'opère cette articulation dans le cas de l'aire et de la longueur.

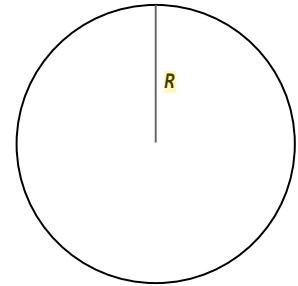
La voie théorique consiste à établir, comme on l'a fait dès l'Antiquité, des relations de proportionnalité entre les aires de certaines figures planes comme le rectangle, le triangle et le cercle, et des longueurs bien choisies de ces figures. Ces relations géométriques relient les grandeurs elles-mêmes.



$$A_{\text{rectangle}} \propto LL'$$

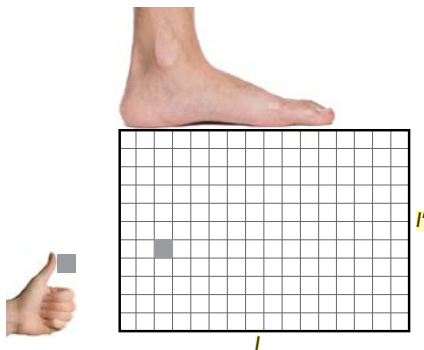


$$A_{\text{triangle}} \propto BH$$

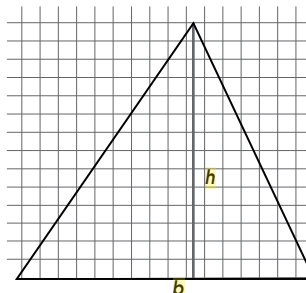


$$A_{\text{cercle}} \propto R^2$$

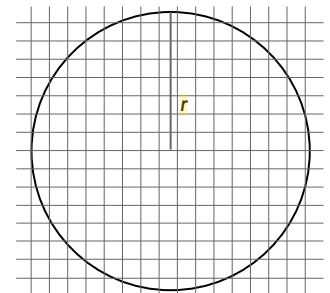
La voie expérimentale consiste à mesurer directement les aires et les longueurs en les comparant avec une grandeur de même espèce prise comme unité : les longueurs en pieds et les aires en nombre de carrés de un pouce de côté contenus dans la figure, par exemple. L'on constate alors que les mesures de l'aire et des côtés de plusieurs rectangles distincts vérifient une relation empirique où intervient une constante numérique, 144, qui est sensiblement la même pour tous les rectangles. Le même constat vaut pour les triangles et les cercles avec des constantes différentes. Les constantes numériques, déterminées à partir des mesures, dépendent des unités choisies (1 pied $\approx$ 12 pouces).



$$a_{\text{rectangle}} \approx 144 l l'$$



$$a_{\text{triangle}} \approx 72 b h = 144 b h / 2$$



$$a_{\text{cercle}} \approx 452 r^2 \approx 144 \pi r^2$$

Il est possible de synthétiser les descriptions expérimentales et théoriques sous la forme d'équations mathématiques semblables aux expressions empiriques, mais établies cette fois entre grandeurs et non plus entre mesures numériques, et ce de deux façons.

Option 1 : de façon dogmatique, on décide que les constantes numériques qui interviennent dans les expressions empiriques sont des constantes fondamentales dimensionnées. La constante $C = 144$ pouces carrés par pied carré apparaît alors comme une constante géométrique fondamentale reliant les aires de surfaces planes et les longueurs. Les équations ont ainsi l'avantage d'être indépendantes des unités choisies, car la valeur numérique de C varie en fonction des unités d'aire et de longueur de manière à laisser l'équation invariante. Elles peuvent donc être écrites entre les grandeurs elles-mêmes :

$$\begin{aligned} A_{\text{rectangle}} &= C \times LL' \\ A_{\text{triangle}} &= C \times BH / 2 \\ A_{\text{cercle}} &= C \times \pi R^2 \end{aligned}$$

Option 2 : on fixe la valeur de la constante tirée de l'expérience à une valeur numérique (c'est-à-dire sans dimension) commode, souvent 1. On obtient alors des équations entre grandeurs où la constante C , prise égale à 1, a disparu :

$$\begin{aligned} A_{\text{rectangle}} &= LL' \\ A_{\text{triangle}} &= BH / 2 \\ A_{\text{cercle}} &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Conséquence 1 : les aires cessent d'être considérées comme des grandeurs indépendantes reliées aux longueurs par une loi empirique : elles deviennent des grandeurs dérivées, définies à partir des longueurs par un calcul. Dès lors, la grandeur aire est déclarée conceptuellement identique à des longueurs au carré.

Conséquence 2 : le choix de la valeur de C détermine la taille de l'unité d'aire en fonction de l'unité de longueur. Ici, l'unité d'aire doit être définie par 144 carrés de un pouce de côté, soit 144 pouces carrés, soit 12² pouces carrés, soit 1 pied carré. L'on aura alors construit un système cohérent d'unités dans lequel l'équation $A_{\text{rectangle}} = LL'$ est indifféremment interprétable comme une équation entre grandeurs physiques ou une équation entre mesures de ces grandeurs, ce qui facilite le passage de la théorie à l'expérience.