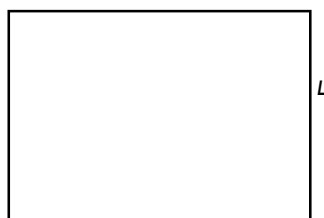


COMMENT ON CONSTRUIT UN SYSTÈME COHÉRENT D'UNITÉS

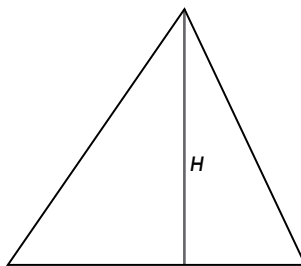
Deux voies existent pour mathématiser un domaine scientifique, l'une théorique, l'autre expérimentale. Pour articuler harmonieusement ces deux voies et bénéficier de la puissance du

calcul symbolique, l'on introduit des constantes fondamentales. Voyons (sans aucune prétention historique) comment s'opère cette articulation dans le cas de l'aire et de la longueur.

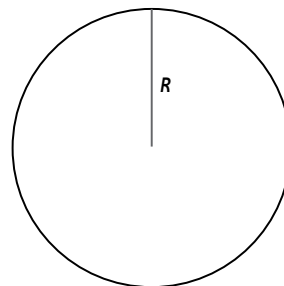
La voie théorique consiste à établir, comme on l'a fait dès l'Antiquité, des relations de proportionnalité entre les aires de certaines figures planes comme le rectangle, le triangle et le cercle, et des longueurs bien choisies de ces figures. Ces relations géométriques relient les grandeurs elles-mêmes.



$$A_{\text{rectangle}} \propto LL'$$

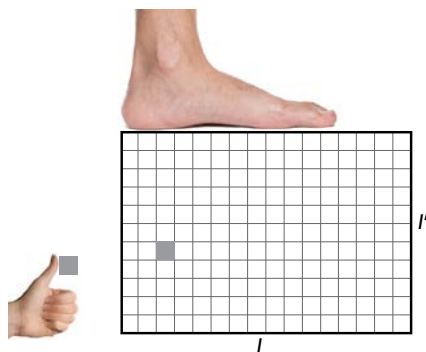


$$A_{\text{triangle}} \propto BH$$

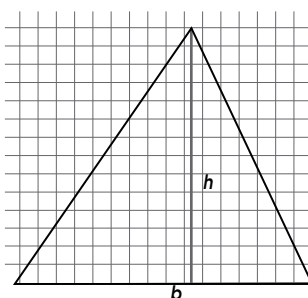


$$A_{\text{cercle}} \propto R^2$$

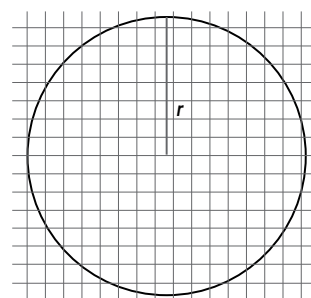
La voie expérimentale consiste à mesurer directement les aires et les longueurs en les comparant avec une grandeur de même espèce prise comme unité : les longueurs en pieds et les aires en nombre de carrés de un pouce de côté contenus dans la figure, par exemple. L'on constate alors que les mesures de l'aire et des côtés de plusieurs rectangles distincts vérifient une relation empirique où intervient une constante numérique, 144, qui est sensiblement la même pour tous les rectangles. Le même constat vaut pour les triangles et les cercles avec des constantes différentes. Les constantes numériques, déterminées à partir des mesures, dépendent des unités choisies (1 pied $\approx$ 12 pouces).



$$a_{\text{rectangle}} \approx 144 ll'$$



$$a_{\text{triangle}} \approx 72 bh = 144 bh / 2$$



$$a_{\text{cercle}} \approx 452 r^2 \approx 144 \pi r^2$$

Il est possible de synthétiser les descriptions expérimentales et théoriques sous la forme d'équations mathématiques semblables aux expressions empiriques, mais établies cette fois entre grandeurs et non plus entre mesures numériques, et ce de deux façons.

Option 1 : de façon dogmatique, on décide que les constantes numériques qui interviennent dans les expressions empiriques sont des constantes fondamentales dimensionnées. La constante $C = 144$ pouces carrés par pied carré apparaît alors comme une constante géométrique fondamentale reliant les aires de surfaces planes et les longueurs. Les équations ont ainsi l'avantage d'être indépendantes des unités choisies, car la valeur numérique de C varie en fonction des unités d'aire et de longueur de manière à laisser l'équation invariante. Elles peuvent donc être écrites entre les grandeurs elles-mêmes :

$$\begin{aligned} A_{\text{rectangle}} &= C \times LL' \\ A_{\text{triangle}} &= C \times BH / 2 \\ A_{\text{cercle}} &= C \times \pi R^2 \end{aligned}$$

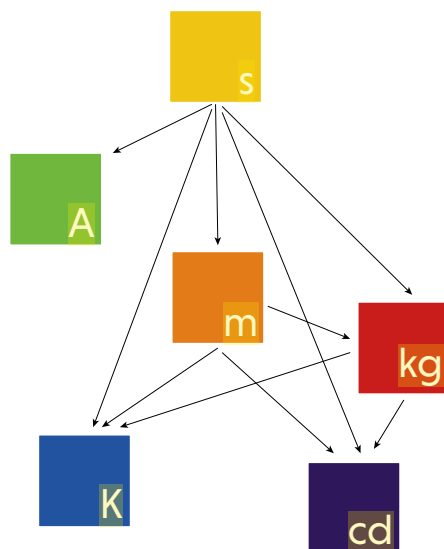
Option 2 : on fixe la valeur de la constante tirée de l'expérience à une valeur numérique (c'est-à-dire sans dimension) commode, souvent 1. On obtient alors des équations entre grandeurs où la constante C , prise égale à 1, a disparu :

$$\begin{aligned} A_{\text{rectangle}} &= LL' \\ A_{\text{triangle}} &= BH / 2 \\ A_{\text{cercle}} &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Conséquence 1 : les aires cessent d'être considérées comme des grandeurs indépendantes reliées aux longueurs par une loi empirique : elles deviennent des grandeurs dérivées, définies à partir des longueurs par un calcul. Dès lors, la grandeur aire est déclarée conceptuellement identique à des longueurs au carré.

Conséquence 2 : le choix de la valeur de C détermine la taille de l'unité d'aire en fonction de l'unité de longueur. Ici, l'unité d'aire doit être définie par 144 carrés de un pouce de côté, soit 144 pouces carrés, soit 12² pouces carrés, soit 1 pied carré. L'on aura alors construit un système cohérent d'unités dans lequel l'équation $A_{\text{rectangle}} = LL'$ est indifféremment interprétable comme une équation entre grandeurs physiques ou une équation entre mesures de ces grandeurs, ce qui facilite le passage de la théorie à l'expérience.

Dans le nouveau système international, toutes les unités de base, hormis la mole (non représentée), dépendent de la seconde : le mètre, par exemple, dépend d'une constante fondamentale, la vitesse de la lumière, c , et de la seconde. Il en va de même pour les autres unités du système international, car toutes sont dérivées de ces unités de base : le newton est le kilogramme mètre par seconde carrée, le joule est le newton mètre, le coulomb est l'ampère seconde, etc. Le physicien allemand Carl Friedrich Gauss a amorcé la construction de ce système en rapportant une grandeur physique, la force, à un ensemble d'unités de base et non plus à une unité propre de même nature.



la constante, et par là de la première définition du mètre – le quart de la dix millionième partie du méridien terrestre, mesuré dans les années 1790 par les astronomes Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain. Cette dépendance est essentielle pour maintenir la continuité historique des résultats expérimentaux ; les résultats obtenus dans l'ancien système demeurent ainsi valables dans le nouveau. Le même procédé servira à redéfinir les autres unités. Ainsi, après avoir été déterminée expérimentalement dans les unités actuelles du système international, la constante de Planck sera fixée sans incertitude à la valeur $h = 6,62607015$ kilogrammes mètres carrés par seconde, et cette valeur servira à déterminer en retour, sur la base des unités existantes du mètre et de la seconde, la « taille » de l'unité de masse, c'est-à-dire la nouvelle définition du kilogramme.

Ces explications soulèvent bien des questions. Comment comprendre le rôle des constantes fondamentales dans ce processus de redéfinition ? Le geste de fixer leur valeur ne constitue-t-il qu'une convention ou comporte-t-il une signification et des conséquences épistémiques plus profondes ? Que recouvre au juste l'inversion sur laquelle repose la redéfinition ?

Déjà à la fin du XIX^e siècle, le physicien irlandais George Stoney, puis Max Planck en 1900, avaient rêvé de mettre en place un système « naturel » d'unités fondé sur des constantes fondamentales. La réforme du système international n'a toutefois vraiment pu être envisagée qu'avec l'élaboration et la maîtrise, toute récente, d'expériences permettant de mesurer les constantes fondamentales avec une exactitude satisfaisante. Mais si les développements scientifiques et techniques du XX^e siècle sont bien au cœur de la réforme, le principe de la redéfinition des unités du système international participe, quant à lui, d'un procédé très ancien

qui gouverne à la fois le regroupement des unités en systèmes d'unités reliées entre elles et un travail de reconfiguration des concepts de la physique entérinant progressivement l'évolution de nos connaissances sur le monde au cours de l'histoire. L'exemple du concept d'aire illustre la façon dont ces deux processus s'articulent (voir l'encadré page ci-contre).

Ce procédé de redéfinition des unités a commencé à se déployer avec l'ébauche du système métrique, qui visait à promouvoir, dans le sillage de la Révolution française, un système d'unités communes « à tous les temps, à tous les peuples ». C'est en effet sur le fond de l'adoption du mètre, du kilogramme et de la seconde que Joseph Fourier a pu passer, dans sa *Théorie analytique de la chaleur* (1822), des équations abstraites de la mécanique rationnelle du XVIII^e siècle, dont les expressions, dites abrégées, étaient juste des relations de proportion réduites en équations (voir l'encadré ci-contre), à de véritables équations mathématiques entre mesures, faisant intervenir des constantes physiques susceptibles d'avoir la même signification pour tous.

Aussi n'est-ce qu'à partir du XIX^e siècle que les physiciens ont pu se mettre à mesurer des « constantes physiques » – qu'il s'agisse de constantes renvoyant à la propriété d'un système physique donné, variables de l'un à l'autre comme la masse volumique de telle substance, ou de constantes universelles valables pour tous les systèmes – et que l'activité de mesure de précision a pris son essor.

LE TOUR DE FORCE DE GAUSS

La mesure de la constante de la gravitation universelle G est l'un des innombrables fruits de cette « avalanche de nombres », comme la nomme l'épistémologue canadien Ian Hacking. C'est en effet fort tardivement, au cours du XIX^e siècle, que cette constante fut explicitement dégagée. Il fallait pour cela que la deuxième loi de Newton, qui exprimait au départ une simple proportionnalité entre force et variation de la quantité de mouvement, fût tout d'abord écrite sous la forme que nous connaissons : celle de l'équation fondamentale de la dynamique $F = MA$ liant la force F appliquée, la masse M du mobile et son accélération A .

L'histoire de cette réécriture est complexe. Mais si l'on s'en tient à l'étape décisive, accomplie par Carl Friedrich Gauss au début du XIX^e siècle, l'on peut voir dans cette équation entre grandeurs l'aboutissement d'un procédé analogue à celui que nous avons décrit pour l'aire. Gauss a cessé de considérer la force comme une grandeur indépendante, mesurée relativement à une unité propre de même nature (par exemple, le kilogramme-force), pour en faire une grandeur dérivée, définie à partir de la masse et de l'accélération, et dont l'unité devint

DES ÉQUATIONS SANS RÉALITÉ TANGIBLE

Au XVIII^e siècle, les lois de la mécanique rationnelle, énoncées sous forme de phrases, furent transcrites en équations. Mais la signification de ces équations demeurait fort abstraite, car il n'existait pas encore d'unités communes à tous les usagers :

« Il y a, dans la géométrie nouvelle, des expressions abrégées qui peuvent d'abord embarrasser ; par exemple celle-ci : la masse du Soleil étant supposée S , la force qu'il exerce à la distance r , sur une planète quelconque, est S/r^2 : il s'agit d'une force attractive, et on la suppose égale à une masse S divisée par le carré d'une distance ; or les forces, les masses et les distances sont des choses hétérogènes et de nature fort différente. On peut demander comment il peut y avoir égalité entre des choses si disparates. »

Jérôme Lalande, *Astronomie*, 1792