

R

ENDEZ-VOUS

P.78 Logique & calcul
 P.84 Idées de physique
 P.88 Science & fiction
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

UN GRAPHE UNIVERSEL ET SINGULIER

Qu'un seul nombre puisse contenir, dans ses décimales, tous les autres est déjà un fait étrange et troublant. Mais le monde des graphes présente une situation analogue encore plus surprenante, qui frôle le paradoxe.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal)

Les nombres universels contiennent toutes les images numériques, tous les textes possibles, et tous les nombres finis ou infinis, y compris eux-mêmes une infinité de fois. De même, le « graphe universel de Rado » contient tous les graphes finis ou infinis. Il existe cependant une différence importante entre ces deux universels : il y a une infinité de nombres universels, alors que le graphe universel de Rado est unique. Il est l'un de ces objets mathématiques aux propriétés déconcertantes dont les chercheurs découvrent l'existence avec stupeur et émerveillement. Aventurons-nous dans ce monde étrange de l'universalité mathématique.

LES NOMBRES UNIVERSELS

En choisissant successivement des chiffres au hasard $a_1, a_2, a_3, \dots$, par exemple avec un dé à dix faces et en les prenant comme les décimales successives d'un nombre commençant par 0, on définit un nombre réel u compris entre 0 et 1 : $u = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Nous considérons ici l'écriture des nombres en base 10, mais ce que nous allons affirmer s'étend à toute base de numération.

Si votre dé est équilibré, c'est-à-dire si chaque face tombe avec une probabilité de $1/10$, le nombre u est un nombre universel, ou « nombre univers », ou « nombre disjonctif ». Par définition, cela signifie que toute suite finie de chiffres se situe quelque part après la virgule, en un seul bloc, dans les décimales de u .

Dans u , vous trouverez donc par exemple 20 fois de suite le 7, ou 1000 fois de suite le 0,

ou la séquence 19982018. Cela signifie aussi que si vous codez la photo de votre grand-père par une suite de chiffres, par exemple avec un million de chiffres lus comme des niveaux de gris et qui, disposés en un carré de 1000 pixels sur 1000, reproduisent la photo, alors cette photo de votre grand-père est quelque part dans ce nombre universel. Bien sûr, dans u , il y a aussi la photo de votre chat, celle de Georg Cantor, celle de la tour Eiffel en construction en janvier 1888, celle de Neil Armstrong posant le pied sur la Lune le 20 juillet 1969, etc. En utilisant un codage où deux chiffres consécutifs définissent un numéro de lettre, vous trouverez aussi dans le nombre universel u le texte des *Éléments* d'Euclide, la déclaration universelle des droits de l'homme en serbo-croate, *Le Capital* de Karl Marx écrit en français à l'envers et en supprimant la page 666, et même le texte de cet article ou le récit en dix pages de votre journée de demain. Je n'insiste pas, à vous d'imaginer.

La méthode du dé à dix faces pour définir un nombre universel n'est pas parfaitement satisfaisante, car elle fait intervenir le hasard et qu'il faut attendre un temps infini pour en disposer ! Une autre méthode, cette fois déterministe, proposée par David Champernowne, un ami d'Alan Turing, consiste à écrire les uns derrière les autres les chiffres des entiers : le nombre de Champernowne $Ch = 0,1234567891011121314151617181920212223\dots$ est universel. Concaténer les nombres premiers donne aussi un nombre universel.

Par définition, les nombres universels contiennent toutes les suites finies possibles de ➤



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

TOUS LES GRAPHES SONT DANS LE GRAPHE DE RADO

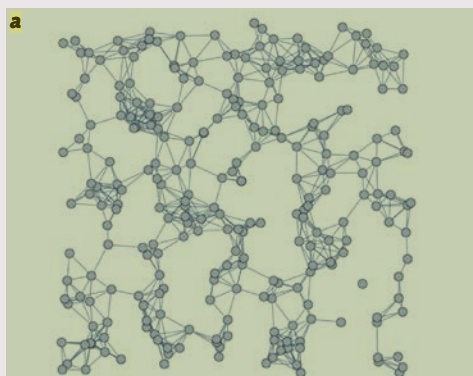
1

Partout en mathématiques, en informatique et dans bien d'autres domaines, on rencontre des graphes finis (c'est-à-dire qui ont un nombre fini de nœuds) ou infinis. Le graphe *a* est un graphe aléatoire, produit par un programme écrit en Mathematica (<https://mathematica.stackexchange.com/questions/38589/random-geometric-graph-generation-problem?rq=1>). Le graphe *b* est un arbre binaire infini : chaque branche se divise en deux branches

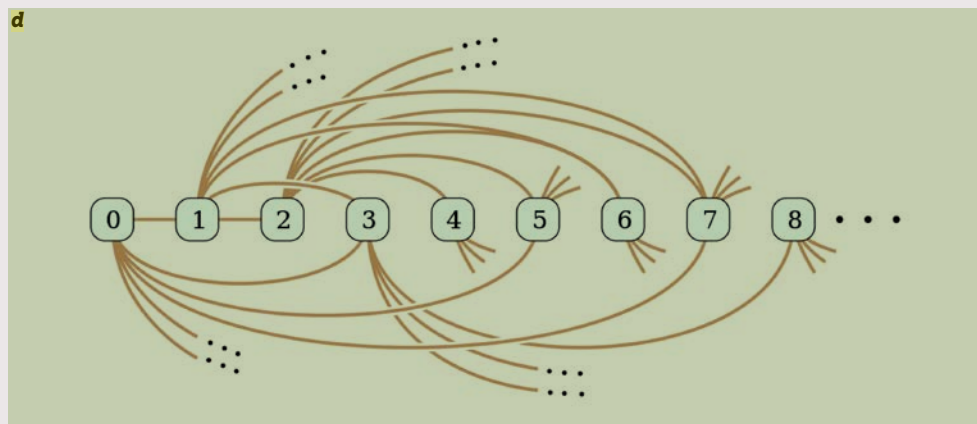
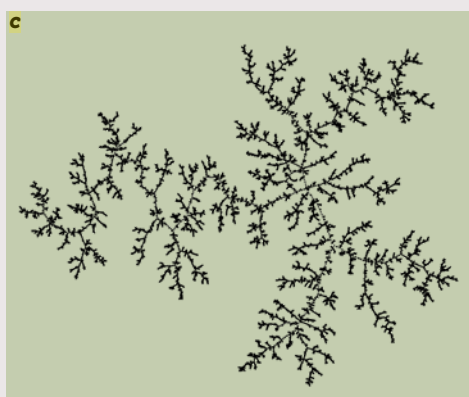
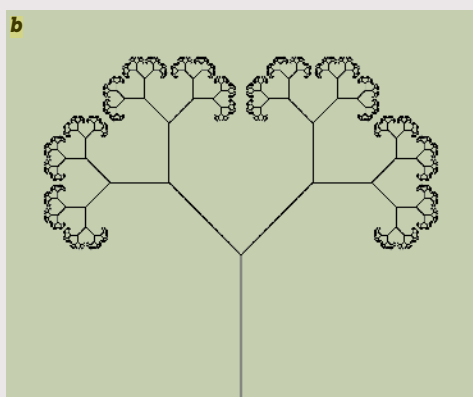
symétriques. Le graphe *c* est un graphe aléatoire dont on a fait tendre la longueur des arcs vers zéro. Ces graphes, ainsi d'ailleurs que tous les autres, sont présents dans le graphe de Rado (*d*), dont la structure contient toutes les structures de graphes (finis ou infinis) possibles. Les nœuds du graphe de Rado sont identifiés par les entiers naturels. Les arêtes sont déterminées par la règle suivante. Si x et y sont deux nombres entiers, avec $x < y$, il existe une arête les reliant

si le x -ième chiffre (en comptant à partir de la droite et en partant de 0) de y écrit en binaire est un 1.

Prenons l'exemple $x = 2$, $y = 5$. L'écriture binaire de y est 101, dont le 2^e chiffre à partir de la droite, en comptant à partir de 0, est 1. On a donc une arête entre les nœuds 2 et 5. En revanche, pour $x = 1$ et $y = 5$, il n'y a pas d'arête reliant ces deux nœuds, car le 1^{er} chiffre à partir de la droite (en comptant à partir de 0) de l'écriture binaire (101) de y est 0.



Richard Rado, né en 1906 à Berlin d'un père hongrois, est mort en Grande-Bretagne en 1989, où il avait émigré en 1933 après l'arrivée des nazis au pouvoir.



> chiffres comme sous-suite de chiffres consécutifs. Ces nombres sont universels dans un autre sens: ils contiennent tous les nombres réels compris entre 0 et 1, quel que soit leur développement décimal infini. Le sens de «contient» n'exige pas, cette fois, que les chiffres pris en considération soient consécutifs: le nombre $r=0, a_1 a_2 a_3 \dots$ contient le nombre $s=0, b_1 b_2 b_3 \dots$ si dans r on trouve dans l'ordre les chiffres de s . Le nombre $r=0,1234321234321234321 \dots$ contient par exemple le nombre $s=0,123123123123$; on a souligné ce qui permet de l'affirmer. L'inverse n'est pas vrai: s ne contient pas r .

Si r et r' sont deux nombres universels, alors r contient r' , et r' contient r . Cela semble un peu paradoxal, mais à tort: l'infini le permet. Cette propriété de double inclusion est amusante, bien que ce soit une conséquence facile de la première définition. En effet, si un nombre vérifie la première définition (toute suite finie y figure en un seul bloc), alors elle contient une infinité de fois le 0, une infinité de fois le 1, etc. Trouver dans l'ordre une suite infinie quelconque de chiffres est donc toujours possible.

De multiples calculs et tests font soupçonner, sans qu'on ait encore su le démontrer, que les nombres suivants, dont on ne considère que ce qui est derrière la virgule, sont universels: $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \log 2$. C'est le cas aussi pour bien d'autres nombres rencontrés en analyse: ils

semblent universels sans qu'on sache l'établir rigoureusement. Tout ce qui concerne les nombres universels n'est heureusement pas aussi difficile à prouver. Voici quelques propriétés qui ont été démontrées.

Dans les chiffres d'un nombre universel, toute suite finie de chiffres est présente (en un seul bloc) non pas une fois, mais une infinité de fois; donc, quand un nombre est universel, si on modifie un nombre fini de chiffres soit en les supprimant soit en les remplaçant par d'autres, il reste universel.

Si l'on ne retient qu'un chiffre sur deux d'un nombre universel, il le reste. Il en est de même quand on prend régulièrement un chiffre sur k dans ses décimales. Pour le nombre de Champernowne, enlever un chiffre sur deux donne: $Ch' = 0,13579012345678901234567890123456789 \dots$

On peut retirer d'un nombre universel tout autre nombre et obtenir que le reste soit encore un nombre universel. Idée de la démonstration: quand on cherche à retirer un chiffre, ne pas retirer le premier qui se présente, mais le suivant. Par exemple, si l'on cherche à retirer $0,123123123123123 \dots$ de $0,12345612345612346 \dots$ prendre le second 1 (surligné), le second 2 qui se présente ensuite (surligné), le second 3 qui se présente ensuite, etc.

Il résulte de la propriété précédente que l'on peut retirer un nombre universel de lui-même... et recommencer une infinité de fois: un nombre universel est infiniment présent en lui-même. Les fractales ont des propriétés analogues, mais à la condition de changer d'échelle, ce qui n'est pas le cas ici.

Ce que l'on vient de voir pour les nombres universels est étrange. Ce que l'on va découvrir maintenant au sujet des graphes universels l'est encore plus, en particulier quant au lien qui existe entre les deux notions d'universalité.

GRAPHES FINIS ET INFINIS

Fixons le vocabulaire. Un graphe est un ensemble fini $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ou infini «numérotable» $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ de points, les «nœuds» du graphe, qui peuvent être liés par des «arêtes». Entre deux nœuds, soit il y a une arête (une seule), soit il n'y en a pas. Les arêtes ne sont pas orientées ($ab=ba$), et on ne s'autorise pas à relier un nœud directement à lui-même.

Un exemple de graphe infini est celui dont les nœuds sont étiquetés par les entiers positifs ou négatifs, avec une arête reliant chaque couple de nombres consécutifs $n, n+1$ (voir l'encadré 2). Autre exemple: le graphe complet reliant tous les entiers, où chaque entier est lié par des arêtes à tous les autres.

Deux graphes G et H sont «isomorphes» s'il est possible de remplacer les noms des nœuds de G par ceux des nœuds de H de telle façon que les arêtes du graphe G' ainsi obtenu coïncident

2

ISOMORPHISME DE GRAPHES

Deux graphes qui ont la même structure sont dits isomorphes: en renommant les nœuds d'un des deux graphes on obtient exactement l'autre graphe. Ainsi, les deux graphes finis représentés en (a) sont

isomorphes par la transformation indiquée à droite. Le schéma (b) donne un exemple de graphes infinis isomorphes par la transformation $n \rightarrow 2^n$.

