

> chiffres comme sous-suite de chiffres consécutifs. Ces nombres sont universels dans un autre sens: ils contiennent tous les nombres réels compris entre 0 et 1, quel que soit leur développement décimal infini. Le sens de «contient» n'exige pas, cette fois, que les chiffres pris en considération soient consécutifs: le nombre $r=0, a_1 a_2 a_3 \dots$ contient le nombre $s=0, b_1 b_2 b_3 \dots$ si dans r on trouve dans l'ordre les chiffres de s . Le nombre $r=0,1234321234321234321\dots$ contient par exemple le nombre $s=0,123123123123$; on a souligné ce qui permet de l'affirmer. L'inverse n'est pas vrai: s ne contient pas r .

Si r et r' sont deux nombres universels, alors r contient r' , et r' contient r . Cela semble un peu paradoxal, mais à tort: l'infini le permet. Cette propriété de double inclusion est amusante, bien que ce soit une conséquence facile de la première définition. En effet, si un nombre vérifie la première définition (toute suite finie y figure en un seul bloc), alors elle contient une infinité de fois le 0, une infinité de fois le 1, etc. Trouver dans l'ordre une suite infinie quelconque de chiffres est donc toujours possible.

De multiples calculs et tests font soupçonner, sans qu'on ait encore su le démontrer, que les nombres suivants, dont on ne considère que ce qui est derrière la virgule, sont universels: π , e , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\log 2$. C'est le cas aussi pour bien d'autres nombres rencontrés en analyse: ils

semblent universels sans qu'on sache l'établir rigoureusement. Tout ce qui concerne les nombres universels n'est heureusement pas aussi difficile à prouver. Voici quelques propriétés qui ont été démontrées.

Dans les chiffres d'un nombre universel, toute suite finie de chiffres est présente (en un seul bloc) non pas une fois, mais une infinité de fois; donc, quand un nombre est universel, si on modifie un nombre fini de chiffres soit en les supprimant soit en les remplaçant par d'autres, il reste universel.

Si l'on ne retient qu'un chiffre sur deux d'un nombre universel, il le reste. Il en est de même quand on prend régulièrement un chiffre sur k dans ses décimales. Pour le nombre de Champernowne, enlever un chiffre sur deux donne: $Ch'=0,13579012345678901234567890123456789\dots$

On peut retirer d'un nombre universel tout autre nombre et obtenir que le reste soit encore un nombre universel. Idée de la démonstration: quand on cherche à retirer un chiffre, ne pas retirer le premier qui se présente, mais le suivant. Par exemple, si l'on cherche à retirer $0,123123123123\dots$ de $0,12345612345612346\dots$ prendre le second 1 (surligné), le second 2 qui se présente ensuite (surligné), le second 3 qui se présente ensuite, etc.

Il résulte de la propriété précédente que l'on peut retirer un nombre universel de lui-même... et recommencer une infinité de fois: un nombre universel est infiniment présent en lui-même. Les fractales ont des propriétés analogues, mais à la condition de changer d'échelle, ce qui n'est pas le cas ici.

Ce que l'on vient de voir pour les nombres universels est étrange. Ce que l'on va découvrir maintenant au sujet des graphes universels l'est encore plus, en particulier quant au lien qui existe entre les deux notions d'universalité.

GRAPHES FINIS ET INFINIS

Fixons le vocabulaire. Un graphe est un ensemble fini $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ou infini «numérotable» $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ de points, les «nœuds» du graphe, qui peuvent être liés par des «arêtes». Entre deux nœuds, soit il y a une arête (une seule), soit il n'y en a pas. Les arêtes ne sont pas orientées ($ab=ba$), et on ne s'autorise pas à relier un nœud directement à lui-même.

Un exemple de graphe infini est celui dont les nœuds sont étiquetés par les entiers positifs ou négatifs, avec une arête reliant chaque couple de nombres consécutifs $n, n+1$ (voir l'encadré 2). Autre exemple: le graphe complet reliant tous les entiers, où chaque entier est lié par des arêtes à tous les autres.

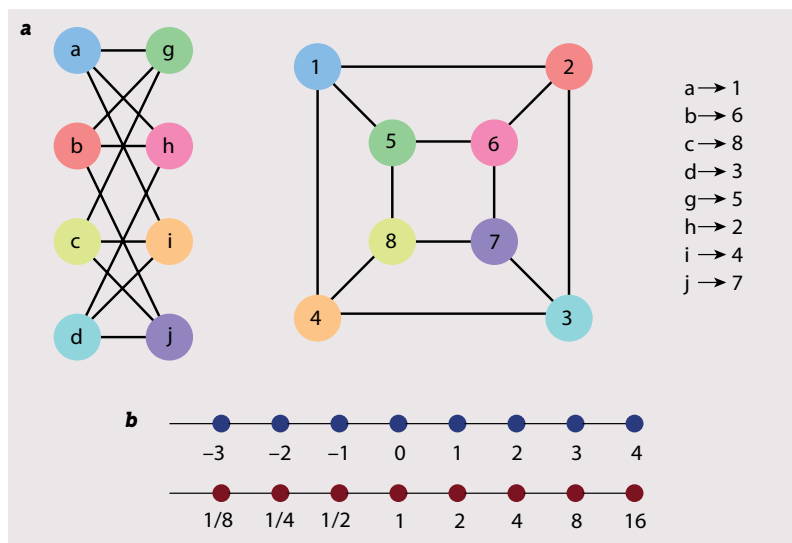
Deux graphes G et H sont «isomorphes» s'il est possible de remplacer les noms des nœuds de G par ceux des nœuds de H de telle façon que les arêtes du graphe G' ainsi obtenu coïncident

2

ISOMORPHISME DE GRAPHES

Deux graphes qui ont la même structure sont dits isomorphes: en renommant les nœuds d'un des deux graphes on obtient exactement l'autre graphe. Ainsi, les deux graphes finis représentés en (a) sont

isomorphes par la transformation indiquée à droite. Le schéma (b) donne un exemple de graphes infinis isomorphes par la transformation $n \rightarrow 2^n$.



exactement avec celles de H. Autrement dit, deux graphes sont isomorphes s'ils ont exactement la même structure.

Par exemple, considérons le graphe infini H dont les nœuds sont étiquetés par les nombres de la forme 2^n , où n est un entier positif ou négatif, et où une arête relie chaque couple de nombres $(2^n, 2^{n+1})$. Il est facile de voir que les deux graphes G et H, où G est l'exemple donné plus haut, sont isomorphes: en renommant 2^n chaque nœud n de G, on passe de G à H.

Un graphe G est considéré comme un sous-graphe du graphe H si chaque nœud de G est aussi un nœud de H et si les arêtes de G et de H reliant ces nœuds communs sont les mêmes. Dit plus simplement: on ne regarde dans H que les nœuds de G et leurs liens, et cela donne G. Lorsqu'un graphe H est isomorphe à un sous-graphe du graphe G, on dit simplement que H est inclus dans G ou que G contient H (voir l'encadré 3).

Les graphes finis inclus dans le graphe complet dont les nœuds sont les entiers (chaque entier étant lié à tous les autres) sont les graphes complets sur les ensembles finis. Bien que très dense, le graphe complet des entiers ne contient donc pas tous les graphes finis possibles (puisque les sous-graphes du graphe complet sont toujours des graphes complets, le graphe complet ne contient pas certains graphes finis).

Ces notions de graphes sont utiles dans une multitude de domaines: pour représenter des chemins, des dessins, des réseaux ou même des relations abstraites – par exemple commerciales, d'autorité ou de parenté.

LE GRAPHE DE RADO

Le graphe de Rado, aussi dénommé «le graphe aléatoire», ou «le graphe universel» a été découvert en 1964 par le mathématicien allemand Richard Rado; il avait été entrevu par l'Allemand Wilhelm Ackermann en 1937, puis par les Hongrois Paul Erdős et Alfréd Rényi en 1963.

La définition proposée par Rado est un peu rébarbative. Les nœuds du graphe de Rado sont les nombres entiers (voir le dessin dans l'encadré 1), il s'agit donc d'un graphe infini. Si x et y sont deux entiers, avec $x < y$, il y a une arête entre x et y si le x -ième chiffre (en comptant à partir de la droite et en partant de 0) de y écrit en base 2 est un 1.

Prenons l'exemple de $x=4$ et $y=23$. L'entier 23 s'écrit 10111 en base 2; son quatrième chiffre en partant de la droite et en comptant à partir de 0 est un 1 (souligné): il y a donc une arête entre 4 et 23 dans le graphe de Rado. Il n'y en a pas entre 3 et 23. Il y en a une entre 2 et 23, entre 1 et 23 et entre 0 et 23.

Le graphe de Rado est universel dans le sens suivant: il contient tout graphe fini et même tout graphe infini. Qu'il puisse exister

3

UN GRAPHE CONTENU DANS UN AUTRE

On dit qu'un graphe H est un sous-graphe de G (ou que H est contenu dans G, ou que G contient H) si les nœuds de H sont des nœuds de G, et si les arêtes de H se déduisent des arêtes de G. Si H est isomorphe à un sous-graphe de G, on dit aussi que H est contenu dans G.

Exemple 1 : la partie en rouge du graphe infini dessiné ci-dessous (a) est un sous-graphe infini de ce graphe.

Exemple 2 : le graphe (b) ci-dessous contient le graphe cyclique à 6 nœuds, et le contient même deux fois, mais il ne contient pas le graphe linéaire à 11 nœuds, car quand on prend un sous-graphe d'un graphe G, on doit prendre toutes les arêtes de G qui joignent les nœuds retenus.

Exemple 3 : le graphe ligne $0 - 1 - 2 - \dots$ est inclus dans le graphe

$\dots - (-3) - (-2) - (-1) - 0 - 1 - 2 - 3 - \dots$

Exemple 4 : Le graphe complet à 6 nœuds (chaque nœud est lié à tous les autres) est contenu dans le graphe complet à 7 nœuds.

