

exactement avec celles de H. Autrement dit, deux graphes sont isomorphes s'ils ont exactement la même structure.

Par exemple, considérons le graphe infini H dont les nœuds sont étiquetés par les nombres de la forme 2^n , où n est un entier positif ou négatif, et où une arête relie chaque couple de nombres $(2^n, 2^{n+1})$. Il est facile de voir que les deux graphes G et H, où G est l'exemple donné plus haut, sont isomorphes: en renommant 2^n chaque nœud n de G, on passe de G à H.

Un graphe G est considéré comme un sous-graphe du graphe H si chaque nœud de G est aussi un nœud de H et si les arêtes de G et de H reliant ces nœuds communs sont les mêmes. Dit plus simplement: on ne regarde dans H que les nœuds de G et leurs liens, et cela donne G. Lorsqu'un graphe H est isomorphe à un sous-graphe du graphe G, on dit simplement que H est inclus dans G ou que G contient H (voir l'encadré 3).

Les graphes finis inclus dans le graphe complet dont les nœuds sont les entiers (chaque entier étant lié à tous les autres) sont les graphes complets sur les ensembles finis. Bien que très dense, le graphe complet des entiers ne contient donc pas tous les graphes finis possibles (puisque les sous-graphes du graphe complet sont toujours des graphes complets, le graphe complet ne contient pas certains graphes finis).

Ces notions de graphes sont utiles dans une multitude de domaines: pour représenter des chemins, des dessins, des réseaux ou même des relations abstraites – par exemple commerciales, d'autorité ou de parenté.

LE GRAPHE DE RADO

Le graphe de Rado, aussi dénommé «le graphe aléatoire», ou «le graphe universel» a été découvert en 1964 par le mathématicien allemand Richard Rado; il avait été entrevu par l'Allemand Wilhelm Ackermann en 1937, puis par les Hongrois Paul Erdős et Alfréd Rényi en 1963.

La définition proposée par Rado est un peu rébarbative. Les nœuds du graphe de Rado sont les nombres entiers (voir le dessin dans l'encadré 1), il s'agit donc d'un graphe infini. Si x et y sont deux entiers, avec $x < y$, il y a une arête entre x et y si le x -ième chiffre (en comptant à partir de la droite et en partant de 0) de y écrit en base 2 est un 1.

Prenons l'exemple de $x=4$ et $y=23$. L'entier 23 s'écrit 10111 en base 2; son quatrième chiffre en partant de la droite et en comptant à partir de 0 est un 1 (souligné): il y a donc une arête entre 4 et 23 dans le graphe de Rado. Il n'y en a pas entre 3 et 23. Il y en a une entre 2 et 23, entre 1 et 23 et entre 0 et 23.

Le graphe de Rado est universel dans le sens suivant: il contient tout graphe fini et même tout graphe infini. Qu'il puisse exister

3

UN GRAPHE CONTENU DANS UN AUTRE

On dit qu'un graphe H est un sous-graphe de G (ou que H est contenu dans G, ou que G contient H) si les nœuds de H sont des nœuds de G, et si les arêtes de H se déduisent des arêtes de G. Si H est isomorphe à un sous-graphe de G, on dit aussi que H est contenu dans G.

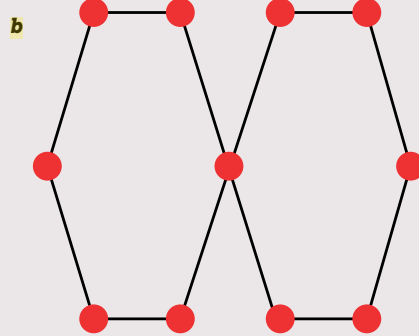
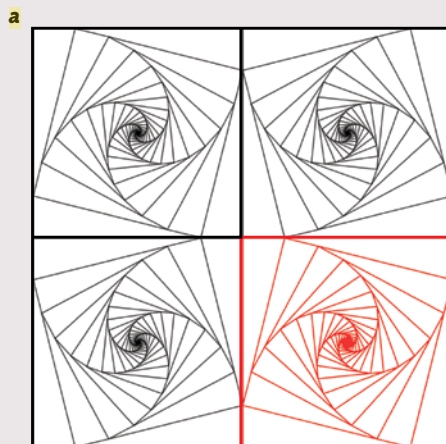
Exemple 1 : la partie en rouge du graphe infini dessiné ci-dessous (a) est un sous-graphe infini de ce graphe.

Exemple 2 : le graphe (b) ci-dessous contient le graphe cyclique à 6 nœuds, et le contient même deux fois, mais il ne contient pas le graphe linéaire à 11 nœuds, car quand on prend un sous-graphe d'un graphe G, on doit prendre toutes les arêtes de G qui joignent les nœuds retenus.

Exemple 3 : le graphe ligne $0 - 1 - 2 - \dots$ est inclus dans le graphe

$\dots - (-3) - (-2) - (-1) - 0 - 1 - 2 - 3 - \dots$

Exemple 4 : Le graphe complet à 6 nœuds (chaque nœud est lié à tous les autres) est contenu dans le graphe complet à 7 nœuds.



> un graphe contenant tout graphe fini et tout graphe infini est étonnant : toutes les structures de graphes sont donc là, cachées dans cette histoire de décomposition en base 2 qui fixe les arêtes du graphe de Rado ! Mais il y a encore d'autres surprises.

Nous donnons les idées des démonstrations de ce que nous affirmons. Comprendre est à la portée de chacun, moyennant un petit effort. Bien des démonstrations pour les nombres universels n'exigent rien d'autre qu'un peu d'abstraction et de concentration, et il en est de même ici. Cependant, si les démonstrations vous rebutent ou vous ennuiant, lisez seulement les affirmations en sautant les justifications entre les mots **DÉBUT** et **FIN**, et faites confiance aux chercheurs qui ont découvert et vérifié soigneusement tout cela... moi en particulier, car je n'y croyais pas !

Avant d'énoncer la première affirmation, il faut donner la définition suivante, qui sera le pivot de tous les arguments.

L'EXTENSION AU CENTRE DE TOUT

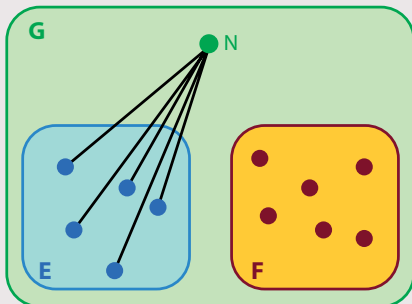
On dit qu'un graphe infini G a la propriété d'extension si, pour tout couple E et F d'ensembles finis disjoints de nœuds de G , il existe un nœud N de G qui est lié à chacun des nœuds de E et à aucun de F (voir l'encadré 4).

4

LA PROPRIÉTÉ D'EXTENSION

Un graphe infini G possède la propriété d'extension si, pour tout couple E et F d'ensembles finis disjoints de nœuds de G , il existe un nœud N de G qui est lié à chaque nœud de E et à aucun de F (idée très schématiquement illustrée ci-dessous).

On montre qu'un graphe ayant cette propriété (c'est le cas du graphe de Rado) contient tout graphe, fini ou infini.



AFFIRMATION. Le graphe de Rado a la propriété d'extension.

DÉBUT Soit n un entier supérieur à chaque nombre de E et chaque nombre de F . On prend pour nœud celui numéroté N , où N est l'entier dont le développement binaire comporte n chiffres binaires (c'est donc un nombre assez grand) et qui est tel qu'il y a un 1 en position e pour chaque nœud e de E et un 0 en position f pour chaque nœud f de F . Si par exemple $E = \{0, 2, 4, 8\}$ et $F = \{3, 7\}$, on prendra $N = 100010101$. **FIN**

Le point important de cette petite théorie réside dans l'énoncé suivant.

AFFIRMATION. Deux graphes infinis qui ont la propriété d'extension sont isomorphes ; autrement dit, ils ont exactement la même structure, qui est donc, compte tenu de l'affirmation précédente, celle du graphe de Rado.

DÉBUT Soient G et H deux graphes ayant la propriété d'extension. Notons $a_0, a_1, \dots$ les nœuds de G et $b_1, b_2, \dots$ ceux de H . Pour montrer que G et H sont isomorphes, on va renommer progressivement leurs nœuds de telle façon qu'avec les nouveaux noms, il sera évident que G et H ont exactement les mêmes arêtes.

Étape 0. On choisit un nœud quelconque c_0 de G et un nœud quelconque c'_0 de H .

Étape 1. On choisit maintenant un nœud c_1 de G différent de c_0 . Dans H , on prend alors, pour c'_1 , un nœud différent de c'_0 qui est lié à c'_0 si c_1 est lié à c_0 dans G , et qui n'est pas lié à c'_0 sinon. Un tel c'_1 existe nécessairement, car H vérifie la propriété d'extension. Le sous-graphe de G déterminé par c_0, c_1 et le sous-graphe de H déterminé par c'_0, c'_1 sont, par construction, isomorphes.

Étape 2. On prend maintenant un nœud c_2 quelconque de H différent de c'_0 et de c'_1 . On choisit dans G un nœud c_2 qui est lié à c_0 et c_1 dans G de la même façon que c'_2 est lié dans H à c'_0 et c'_1 . C'est possible d'après la propriété d'extension de G . Le sous-graphe de G déterminé par c_0, c_1, c_2 et le sous-graphe de H déterminé par c'_0, c'_1, c'_2 sont, par construction, isomorphes.

Étape 3. On prend maintenant un nœud c_3 quelconque de G différent de c_0, c_1 et c_2 . On choisit dans H un nœud c'_3 qui est lié à c'_0, c'_1 et c'_2 dans H de la même façon que c_3 est lié dans G à c_0, c_1 et c_2 . C'est possible d'après la propriété d'extension de H . Et ainsi de suite.

On continue de cette façon en s'arrangeant pour que les choix faits alternativement dans G et H épuisent bien tous les nœuds de G et H , ce qui est possible en prenant à chaque étape le nœud de plus petit numéro non déjà utilisé. Par construction, les liens dans G entre $c_0, c_1, c_2, \dots$ et les liens dans H entre $c'_0, c'_1, c'_2, \dots$ sont exactement les mêmes. Cela montre que G et H ont exactement la même structure : ils sont isomorphes.