

- > un graphe contenant tout graphe fini et tout graphe infini est étonnant: toutes les structures de graphes sont donc là, cachées dans cette histoire de décomposition en base 2 qui fixe les arêtes du graphe de Rado! Mais il y a encore d'autres surprises.

Nous donnons les idées des démonstrations de ce que nous affirmons. Comprendre est à la portée de chacun, moyennant un petit effort. Bien des démonstrations pour les nombres universels n'exigent rien d'autre qu'un peu d'abstraction et de concentration, et il en est de même ici. Cependant, si les démonstrations vous rebutent ou vous ennuiant, lisez seulement les affirmations en sautant les justifications entre les mots **DÉBUT** et **FIN**, et faites confiance aux chercheurs qui ont découvert et vérifié soigneusement tout cela... moi en particulier, car je n'y croyais pas!

Avant d'énoncer la première affirmation, il faut donner la définition suivante, qui sera le pivot de tous les arguments.

L'EXTENSION AU CENTRE DE TOUT

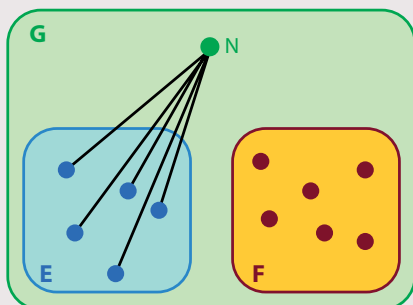
On dit qu'un graphe infini G a la propriété d'extension si, pour tout couple E et F d'ensembles finis disjoints de nœuds de G , il existe un nœud N de G qui est lié à chacun des nœuds de E et à aucun de F (voir l'encadré 4).

4

LA PROPRIÉTÉ D'EXTENSION

Un graphe infini G possède la propriété d'extension si, pour tout couple E et F d'ensembles finis disjoints de nœuds de G , il existe un nœud N de G qui est lié à chaque nœud de E et à aucun de F (idée très schématiquement illustrée ci-dessous).

On montre qu'un graphe ayant cette propriété (c'est le cas du graphe de Rado) contient tout graphe, fini ou infini.



AFFIRMATION. Le graphe de Rado a la propriété d'extension.

DÉBUT Soit n un entier supérieur à chaque nombre de E et chaque nombre de F . On prend pour nœud celui numéroté N , où N est l'entier dont le développement binaire comporte n chiffres binaires (c'est donc un nombre assez grand) et qui est tel qu'il y a un 1 en position e pour chaque nœud e de E et un 0 en position f pour chaque nœud f de F . Si par exemple $E = \{0, 2, 4, 8\}$ et $F = \{3, 7\}$, on prendra $N = 100010101$. **FIN**

Le point important de cette petite théorie réside dans l'énoncé suivant.

AFFIRMATION. Deux graphes infinis qui ont la propriété d'extension sont isomorphes; autrement dit, ils ont exactement la même structure, qui est donc, compte tenu de l'affirmation précédente, celle du graphe de Rado.

DÉBUT Soient G et H deux graphes ayant la propriété d'extension. Notons $a_0, a_1, \dots$ les nœuds de G et $b_1, b_2, \dots$ ceux de H . Pour montrer que G et H sont isomorphes, on va renommer progressivement leurs nœuds de telle façon qu'avec les nouveaux noms, il sera évident que G et H ont exactement les mêmes arêtes.

Étape 0. On choisit un nœud quelconque c_0 de G et un nœud quelconque c'_0 de H .

Étape 1. On choisit maintenant un nœud c_1 de G différent de c_0 . Dans H , on prend alors, pour c'_1 , un nœud différent de c'_0 qui est lié à c'_0 si c_1 est lié à c_0 dans G , et qui n'est pas lié à c'_0 sinon. Un tel c'_1 existe nécessairement, car H vérifie la propriété d'extension. Le sous-graphe de G déterminé par c_0, c_1 et le sous-graphe de H déterminé par c'_0, c'_1 sont, par construction, isomorphes.

Étape 2. On prend maintenant un nœud c_2 quelconque de H différent de c'_0 et de c'_1 . On choisit dans G un nœud c_2 qui est lié à c_0 et c_1 dans G de la même façon que c'_2 est lié dans H à c'_0 et c'_1 . C'est possible d'après la propriété d'extension de G . Le sous-graphe de G déterminé par c_0, c_1, c_2 et le sous-graphe de H déterminé par c'_0, c'_1, c'_2 sont, par construction, isomorphes.

Étape 3. On prend maintenant un nœud c_3 quelconque de G différent de c_0, c_1 et c_2 . On choisit dans H un nœud c'_3 qui est lié à c'_0, c'_1 et c'_2 dans H de la même façon que c_3 est lié dans G à c_0, c_1 et c_2 . C'est possible d'après la propriété d'extension de H . Et ainsi de suite.

On continue de cette façon en s'arrangeant pour que les choix faits alternativement dans G et H épuisent bien tous les nœuds de G et H , ce qui est possible en prenant à chaque étape le nœud de plus petit numéro non déjà utilisé. Par construction, les liens dans G entre $c_0, c_1, c_2, \dots$ et les liens dans H entre $c'_0, c'_1, c'_2, \dots$ sont exactement les mêmes. Cela montre que G et H ont exactement la même structure: ils sont isomorphes.