

Tous les graphes ayant la propriété d'extension sont donc isomorphes entre eux; il n'y a donc qu'une seule sorte de graphe ayant la propriété d'extension, et cette structure est celle du graphe de Rado. **FIN**

On démontre aussi, par un procédé très proche du précédent, que tout graphe ayant la propriété d'extension contient tout graphe fini ou infini, autrement dit qu'il est universel.

TOUT GRAPHE ALÉATOIRE ET INFINI DONNE LE GRAPHE DE RADO

On construit un graphe aléatoire infini en se donnant un ensemble infini de nœuds $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ et en tirant à pile ou face pour chaque couple de nœuds $a_i a_j$ afin de déterminer si on les lie par une arête (par exemple oui si c'est pile, non si c'est face). On prouve qu'un tel graphe est isomorphe au graphe de Rado.

Les graphes finis aléatoires sont définis comme précédemment: un tirage aléatoire détermine si on place une arête entre deux nœuds. Leur étude conduit à une théorie importante qui donne lieu à une multitude de résultats délicats et profonds, dont une bonne partie est due au célèbre et prolifique mathématicien hongrois Paul Erdős.

Le résultat concernant l'unicité du graphe de Rado rend impossible une théorie analogue pour les graphes aléatoires infinis, qui sont tous isomorphes. Cette situation est inhabituelle, car en général le passage du fini à un infini fondé sur les mêmes idées donne naissance à une théorie plus complexe et difficile. Ici, c'est l'inverse: la théorie des graphes aléatoires finis est riche, difficile et complexe, tandis que la théorie des graphes aléatoires infinis se réduit à peu de choses et est au fond assez simple. Dans leur livre *Probabilistic Methods in Combinatorics* (1974), Erdős et Joel Spencer l'ont affirmé clairement: le résultat d'unicité des graphes infinis aléatoires «démolit la théorie des graphes infinis aléatoires».

UNE INVARIANCE EXTRÊME

Un peu comme les nombres universels, dont chacun contient tous les autres et qui sont résistants par modification finie, le graphe de Rado est lui aussi invariant par modification finie. Mais, cette fois, le résultat de la modification est plus spectaculaire, puisque le graphe d'une modification est le graphe lui-même: enlever des morceaux finis ne le change pas et le couper en deux le maintient intact. Mieux que les fractales, figures que l'on retrouve en plus petites en elles-mêmes, ici on retrouve le graphe de Rado en lui-même, exactement, sans la moindre modification.

AFFIRMATION. En enlevant un nombre fini de nœuds, ou en changeant un nombre fini d'arêtes, on ne change pas le graphe de Rado. En séparant en deux le graphe de Rado (on

sépare les nœuds en deux sous-ensembles disjoints et complémentaires), l'un des morceaux est le graphe de Rado.

À chaque fois, la démonstration se fonde sur la propriété d'extension dont on voit qu'elle persiste. Notons que la dernière pro-

On a un sentiment d'étrangeté et de magie face à cet objet mathématique singulier

priété n'est pas vraie pour les nombres universels: si l'on répartit les chiffres d'un nombre universel en deux, il se peut qu'aucun des deux nombres obtenus ne soit universel: il suffit de mettre tous les 0 dans l'un des morceaux et tous les 1 dans l'autre.

UN LIEN ENTRE NOMBRES UNIVERSELS ET GRAPHES UNIVERSELS

On pouvait s'attendre à ce qu'il existe un lien entre les nombres universels et le graphe universel de Rado. C'est le cas! On commence par associer un graphe infini G_r à chaque nombre réel r compris entre 0 et 1, en procédant de la façon suivante. On écrit r en base 2, $r = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, on prend comme ensemble de nœuds du graphe G_r l'ensemble des entiers relatifs $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ et on décide qu'il y a une arête entre deux nœuds n et m , avec $n > m$, si et seulement si le chiffre binaire en position $n - m$ dans r est 1. Le nombre de Champernowne en base 2, $Ch_2 = 0,01101100101110111\dots$, définit un tel graphe. On démontre que le graphe défini par un nombre universel en base 2 a la propriété d'extension et donc qu'il est toujours le même graphe infini: le graphe universel de Rado.

Nous n'avons pas évoqué certaines autres définitions inattendues du graphe de Rado; il en existe par exemple une fondée sur les nombres premiers. Elles accroissent encore le sentiment d'étrangeté et de magie ressentie face à cet objet mathématique singulier. Le monde de l'infini mathématique dépasse parfois l'entendement. Bien que tout se démontre et même quand on comprend chaque point des démonstrations, l'émerveillement persiste... ainsi que, peut-être, un certain doute. ■

BIBLIOGRAPHIE

Wikipedia, **Rado graph**, 2018.

C. Biró et U. B. Darji, **Generating infinite random graphs**, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 61(3), pp. 847-868, 2018 (arxiv.org/pdf/1205.3198.pdf).

R. Elwes, **Preferential attachment processes approaching the Rado multigraph**, *arXiv:1502.05618v3*, 2017.

M. S. Kurilić et S. Todorčević, **Copies of the random graph**, *Advances in Mathematics*, vol. 317, pp. 526-552, 2017.

P. J. Cameron, **The random graph**, dans *The Mathematics of Paul Erdős*, vol. II (éd. R. Graham et J. Nešetřil), pp. 333-351, Springer, 1997 ([arXiv:1301.7544](https://arxiv.org/abs/1301.7544), 2013).

J.-P. Delahaye, **Les nombres univers**, *Pour la Science* n° 225, pp. 104-107, juillet 1996.