

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art et science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

FAUT-IL ADOPTER L'AVIS DE SES VOISINS ?

La modélisation de réseaux d'individus dont l'opinion se conforme à celle de la majorité de leurs relations montre des évolutions parfois inattendues où, par exemple, le réseau se met à osciller entre deux états contradictoires.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Dans une communauté ayant une décision à prendre, par exemple quant à la construction d'un pont, un vote doit avoir lieu. Les électeurs sont conciliants : chacun a un avis, OUI ou NON, mais il est prêt à y renoncer si, parmi ses connaissances, plus de la moitié des avis sont contraires au sien. Pendant plusieurs jours, après un tour initial, chacun des électeurs consulte toutes ses connaissances et change d'avis le lendemain sur la construction du pont pour s'ajuster à l'avis majoritaire de ses connaissances consultées la veille. En cas d'égalité entre les pour et les contre parmi ses voisins, l'électeur garde le même avis pour le lendemain. Que va-t-il se passer ?

Ce problème en apparence élémentaire des « dynamiques majoritaires » agite les mathématiciens depuis bientôt 40 ans. Ils en ont découvert une multitude de propriétés inattendues. Le premier résultat important à son sujet a été démontré en 1980 par mon ami Eric Goles, alors doctorant à l'université de Grenoble et aujourd'hui à l'université Adolfo Ibáñez, à Santiago du Chili, et Jorge Olivos, de l'université du Chili : cette dynamique conduit soit à une stabilisation des opinions des électeurs, soit à une oscillation des opinions entre deux configurations C et C' : la configuration C donne le lendemain C' et C' donne le lendemain C. Aucune autre situation (oscillation entre trois états ou plus, désordre prolongé...) n'est possible.

La modélisation du problème se fait avec un graphe dont les nœuds sont les membres de la

communauté concernée, et dont les arêtes (non orientées) indiquent qui se connaît : on place une arête entre A et B si A et B se connaissent et donc s'influencent peut-être d'un jour à l'autre.

Le « théorème de la période 1 ou 2 » de Goles et Olivos stipule que, quelle que soit la répartition initiale des avis sur le graphe, l'application de la dynamique majoritaire conduit, en un nombre fini d'étapes, à une stabilisation complète des avis, ou à une double configuration des avis, chacune produisant l'autre.

Comme on le voit dans l'encadré ci-contre, si l'on part d'une configuration où le OUI l'emporte, le système se stabilise dans certains cas comme on l'attend en adoptant une configuration où le OUI reste majoritaire. Parfois cependant, la stabilisation se produit en adoptant une configuration où le NON l'emporte. Une troisième possibilité est prévue par le théorème de Goles et Olivos : le système se met à osciller entre deux états E et F. Il se peut même (voir l'encadré 1, A3 et B3) que pour E le OUI soit majoritaire et que pour F le NON soit majoritaire.

L'application de la dynamique majoritaire n'est donc pas le meilleur moyen d'arriver à un accord unanime, ou même seulement à un choix satisfaisant. Cependant, ce type d'évolution d'un graphe est très naturel et se rencontre dans plusieurs domaines scientifiques : réseaux d'automates finis, systèmes de votes, immunologie, interactions de cellules, réseaux de neurones, reconnaissance de formes, thermodynamique, etc. Le livre d'Eric Goles et Servet Martínez, *Neural and Automata Networks – Dynamical Behavior and Applications* >

LE THÉORÈME DE LA PÉRIODE 1 OU 2

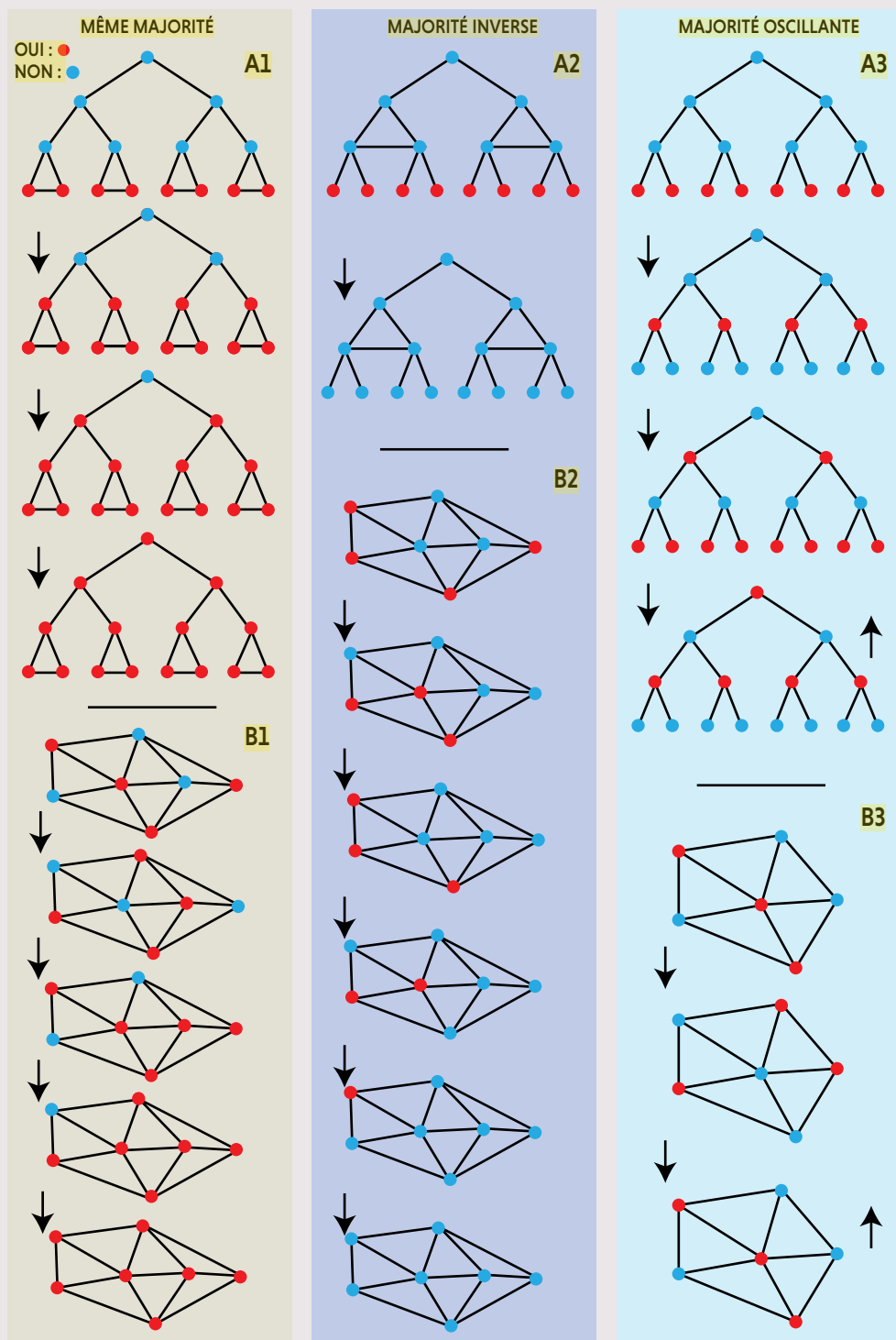
1

Adopter l'avis majoritaire (« oui » ou « non ») de ses voisins pour les nœuds d'un graphe définit un mode d'évolution des opinions. Selon le graphe et selon l'état des opinions de chaque nœud, cette évolution dure plus ou moins longtemps avant soit de se stabiliser, soit d'osciller entre deux configurations.

Les dessins A1 et B1 illustrent le cas où la dynamique majoritaire conduit à un état stable avec la même majorité qu'au départ. Dans les dessins A2 et B2, le graphe d'opinions se stabilise dans une configuration dont la majorité est inverse de celle de départ. Les dessins A3 et B3 montrent la troisième possibilité :

le graphe finit par osciller entre deux configurations.

Le théorème de Goles et Olivos, ou théorème de la période 1 ou 2, indique que des cycles entre plus de deux états sont impossibles : une dynamique majoritaire sur un graphe conduit soit à une stabilisation, soit à un cycle binaire.



> (Springer, 1990), décrit certaines de ces applications.

Depuis la découverte et la publication de ce théorème de la «période 1 ou 2» (dont nous donnerons une brève démonstration à la fin de l'article), une multitude de compléments et de généralisations ont été proposés. L'article de Goles et Olivos fait partie de ces articles scientifiques qui surprennent tout le monde, concernent plusieurs disciplines et ont, par conséquent, une importante descendance. Il a été cité plus de 90 fois dans des publications parues depuis et suscite encore aujourd'hui des recherches visant à améliorer la compréhension de ces dynamiques et des modèles similaires.

Récemment, John Haslegrave, de l'université de Warwick, et Chris Cunnings, de l'université de Sheffield, ont étudié et démontré une série de résultats nouveaux sur un modèle de dynamique tout proche qui semblait pourtant sans espoir.

Dans leur modèle, l'un des nœuds du réseau joue un rôle «d'original indiscipliné»: contrairement aux autres nœuds du réseau, il applique une règle de changement d'avis, indifférente au principe d'ajustement à la majorité des voisins. Avec un tel nœud non conformiste, le théorème de la période 1 ou 2 est faux: des périodes autres que 1 et 2 deviennent possibles.

Avant de présenter ces résultats nouveaux, évoquons l'importante et subtile question des réseaux infinis soumis au jeu de la dynamique majoritaire.

LES RÉSEAUX INFINIS DÉROGENT À LA RÈGLE

Sans le mentionner explicitement, nous avons supposé que le réseau décrivant le graphe des voisins était fini. Cette finitude a pour conséquence que le comportement du réseau devient inévitablement périodique. En effet, puisque le

2

SUR DES GRAPHES INFINIS

Dans le cas d'un graphe infini, les dynamiques majoritaires ne conduisent pas nécessairement à une stabilisation des opinions ou à un cycle binaire. Voici un exemple où le graphe tombe dans un cycle de longueur 3. On considère l'arbre binaire infini ci-dessous où, à chaque niveau, toutes les opinions des nœuds sont identiques. Pour le niveau 0, le nœud choisit OUI; les deux nœuds du niveau 1 choisissent NON; les nœuds du niveau 2 choisissent NON; les 8 nœuds du niveau 3 choisissent OUI. Ensuite, par niveau, on a: NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, etc. (les nœuds de niveau multiple de 3 choisissent OUI, les autres choisissent NON).

Que se passe-t-il entre l'instant 0 et l'instant 1 quand on applique la dynamique majoritaire? Chaque niveau impose son avis au niveau au-dessus: toutes les opinions montent d'un niveau. Il se produit la même chose entre l'instant 1 et l'instant 2 etc. La configuration des avis monte donc d'un niveau à chaque fois. Chaque nœud évolue donc avec une période 3.

Pour tout entier $k > 2$, en utilisant le même principe, on obtient une configuration initiale qui évolue avec une période k . Toutes les périodes sont donc possibles pour un réseau infini.

Toujours en utilisant le même principe (les nœuds d'un niveau sont tous en accord), on fixe la configuration des avis initiaux par niveau selon la séquence: OUI, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, NON, OUI, NON... (des séquences de NON de plus en plus longues). Comme précédemment, tous les votes montent d'un niveau à chaque étape, et on a donc une évolution infinie non périodique.

Plutôt que de fixer l'état initial du réseau pour que son nœud le plus haut donne la suite 01011011101111 (en interprétant les OUI comme des zéros, et les NON comme des 1), on peut lui faire produire les chiffres de n'importe quel nombre écrit en binaire, par exemple π .

Le second dessin représente en couleur les 25 nœuds d'un réseau infini qui sont à une distance inférieure ou égale à 3 arêtes du nœud central. On montre que le nombre de nœuds à une distance inférieure ou égale à n du nœud central est $(n+1)^2 + n^2$. La croissance relativement modérée de ce nombre quand n augmente permet d'établir que sur le graphe infini en forme de quadrillage, le théorème de Goles et Olivos est vrai: la dynamique majoritaire aboutit en chaque nœud à une stabilisation ou à un cycle binaire.

