

- (Springer, 1990), décrit certaines de ces applications.

Depuis la découverte et la publication de ce théorème de la «période 1 ou 2» (dont nous donnerons une brève démonstration à la fin de l'article), une multitude de compléments et de généralisations ont été proposés. L'article de Goles et Olivos fait partie de ces articles scientifiques qui surprennent tout le monde, concernent plusieurs disciplines et ont, par conséquent, une importante descendance. Il a été cité plus de 90 fois dans des publications parues depuis et suscite encore aujourd'hui des recherches visant à améliorer la compréhension de ces dynamiques et des modèles similaires.

Récemment, John Haslegrave, de l'université de Warwick, et Chris Cannings, de l'université de Sheffield, ont étudié et démontré une série de résultats nouveaux sur un modèle de dynamique tout proche qui semblait pourtant sans espoir.

Dans leur modèle, l'un des nœuds du réseau joue un rôle «d'original indiscipliné»: contrairement aux autres nœuds du réseau, il applique une règle de changement d'avis, indifférente au principe d'ajustement à la majorité des voisins. Avec un tel nœud non conformiste, le théorème de la période 1 ou 2 est faux: des périodes autres que 1 et 2 deviennent possibles.

Avant de présenter ces résultats nouveaux, évoquons l'importante et subtile question des réseaux infinis soumis au jeu de la dynamique majoritaire.

LES RÉSEAUX INFINIS DÉROGENT À LA RÈGLE

Sans le mentionner explicitement, nous avons supposé que le réseau décrivant le graphe des voisins était fini. Cette finitude a pour conséquence que le comportement du réseau devient inévitablement périodique. En effet, puisque le

SUR DES GRAPHS INFINIS

Dans le cas d'un graphe infini, les dynamiques majoritaires ne conduisent pas nécessairement à une stabilisation des opinions ou à un cycle binaire. Voici un exemple où le graphe tombe dans un cycle de longueur 3. On considère l'arbre binaire infini ci-dessous où, à chaque niveau, toutes les opinions des nœuds sont identiques. Pour le niveau 0, le nœud choisit OUI ; les deux nœuds du niveau 1 choisissent NON ; les nœuds du niveau 2 choisissent NON ; les 8 nœuds du niveau 3 choisissent OUI. Ensuite, par niveau, on a : NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, etc. (les nœuds de niveau multiple de 3 choisissent OUI, les autres choisissent NON).

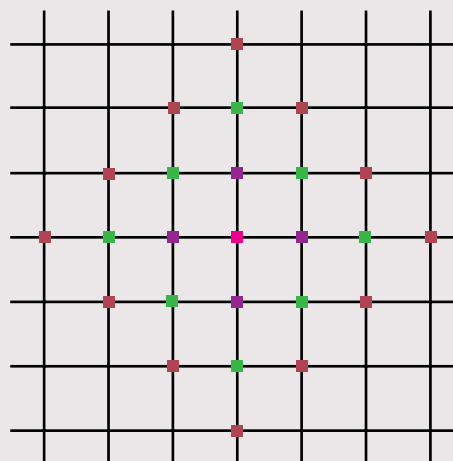
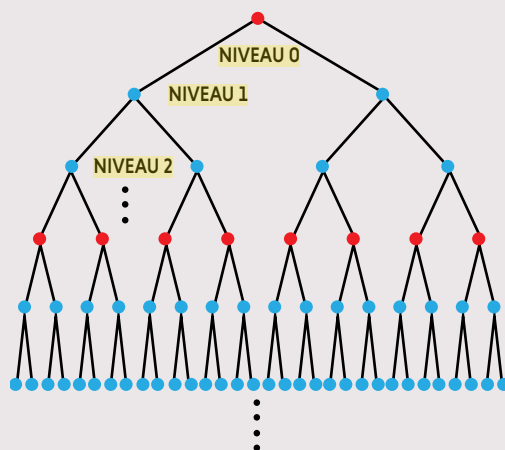
Que se passe-t-il entre l'instant 0 et l'instant 1 quand on applique la dynamique majoritaire ? Chaque niveau impose son avis au niveau au-dessus : toutes les opinions montent d'un niveau. Il se produit la même chose entre l'instant 1 et l'instant 2 etc. La configuration des avis monte donc d'un niveau à chaque fois. Chaque nœud évolue donc avec une période 3.

Pour tout entier $k > 2$, en utilisant le même principe, on obtient une configuration initiale qui évolue avec une période k . Toutes les périodes sont donc possibles pour un réseau infini.

Toujours en utilisant le même principe (les nœuds d'un niveau sont tous en accord), on fixe la configuration des avis initiaux par niveau selon la séquence : OUI, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, NON, OUI, NON, NON, NON, NON... (des séquences de NON de plus en plus longues). Comme précédemment, tous les votes montent d'un niveau à chaque étape, et on a donc une évolution infinie non périodique.

Plutôt que de fixer l'état initial du réseau pour que son nœud le plus haut donne la suite 01011011101111 (en interprétant les OUI comme des zéros, et les NON comme des 1), on peut lui faire produire les chiffres de n'importe quel nombre écrit en binaire, par exemple π .

Le second dessin représente en couleur les 25 nœuds d'un réseau infini qui sont à une distance inférieure ou égale à 3 arêtes du nœud central. On montre que le nombre de nœuds à une distance inférieure ou égale à n du nœud central est $(n+1)^2 + n^2$. La croissance relativement modérée de ce nombre quand n augmente permet d'établir que sur le graphe infini en forme de quadrillage, le théorème de Goles et Olivos est vrai : la dynamique majoritaire aboutit en chaque nœud à une stabilisation ou à un cycle binaire.



réseau ne peut avoir qu'un nombre fini d'états, 2^n s'il y a n nœuds, et que le passage d'un état à un autre est déterministe, le réseau revient obligatoirement à un état qu'il a déjà occupé (finitude), et une fois revenu à un tel état antérieur recommence comme la première fois (déterminisme). L'évolution du réseau vers un fonctionnement périodique n'est pas surprenante; ce qui l'est, selon le théorème de Goles et Olivos, c'est que la période ne peut être que 1 ou 2.

Considérer un réseau s'étendant sur tout le plan ou sur tout l'espace n'est pas absurde, et c'est d'ailleurs ce que l'on fait quand on étudie les automates cellulaires comme celui du *jeu de la vie* de John Conway. Se pose donc la question de savoir si le théorème de la période 1 ou 2 s'étend à un réseau infini.

La réponse a donné lieu à plusieurs travaux de recherche. Elle est négative si l'on n'impose aucune restriction au réseau. L'encadré 2 montre en détail pourquoi, sur un simple graphe en forme d'arbre binaire infini, n'importe quelle période peut survenir en appliquant la dynamique majoritaire. Des comportements totalement désordonnés pour un nœud sont même à craindre. On peut par exemple déposer sur le réseau une configuration initiale de OUI et de NON qui fera que le nœud central (en haut de l'arbre) donnera d'instant en instant les chiffres binaires du nombre π (OUI=0, NON=1): $\pi=11,00100100001111101101010100010...$

Cependant, on observe expérimentalement que pour le réseau régulier dessiné par un quadrillage infini, où chaque nœud est lié à 4 voisins, le théorème de la période 1 ou 2 reste vrai. Quel que soit l'état initial des OUI et des NON posés sur les nœuds de ce réseau infini de carrés, chacun d'eux finira par atteindre un état qu'il ne quittera plus ou bien finira par osciller passant de OUI à NON et de NON à OUI indéfiniment.

Pour séparer les réseaux infinis permettant la généralisation du théorème de la période 1 ou 2 de ceux qui ne la vérifient pas, on considère des graphes infinis dont chaque nœud possède un nombre relativement réduit de liens avec ses voisins. L'énoncé découvert en 1995 par Gadi Moran, de l'université de Haïfa, en Israël, puis généralisé en 2000 par Yuval Ginosar, de l'université de Haïfa, et Ron Holzman, du Technion, à Haïfa également, est assez compliqué, mais nous allons voir qu'il s'applique facilement.

On formule la bonne condition sur le graphe en deux parties :

(a) Il existe un nombre entier D tel qu'un nœud du graphe infini n'est jamais lié à plus de D voisins.

(b) Le nombre $nb(N, n)$ de nœuds du graphe qu'on peut atteindre à partir du nœud N en moins de n étapes (en suivant les nœuds du graphe) n'augmente pas trop rapidement >

3

AVEC UN NŒUD NON CONFORMISTE

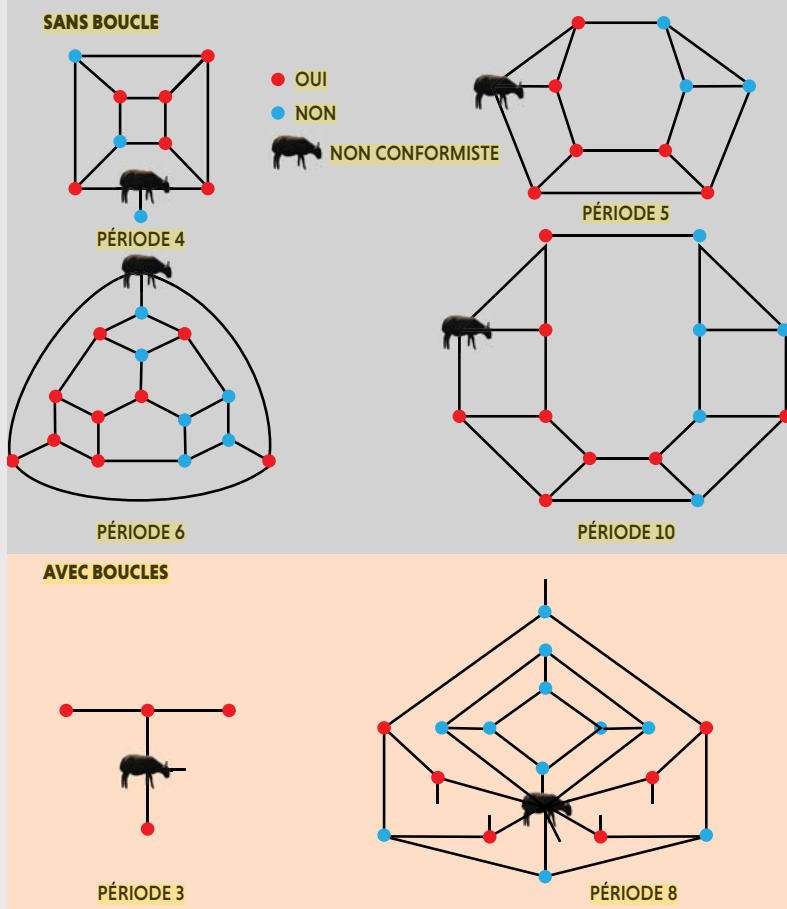
Que se passe-t-il quand un nœud du graphe ne suit pas la règle d'ajustement à la majorité de ses voisins ? L'étude a été menée par John Haslegrave et Chris Cannings (voir la bibliographie). Avec un nœud non conformiste, que l'on peut qualifier de « mouton noir », des cycles autres que 1 et 2 deviennent possibles, mais seulement pour un nombre limité d'entiers comme les résultats mentionnés dans le texte le précisent. En particulier, des cycles de longueur 4 peuvent se produire à cause d'un nœud non conformiste.

On distingue deux cas, selon qu'on autorise ou non un nœud à être relié à lui-même (boucle). Dans le premier cas (pas de boucle),

des cycles d'ordre 4, 5, 6 ou 10 sont possibles. Dans le second cas, peuvent survenir en plus des cycles d'ordre 3, 8 ou 12.

Les dessins ci-dessous représentent les configurations conduisant à certains de ces cycles. On a adopté les conventions de dessin suivantes :

- on représente le nœud non conformiste par un mouton noir, et dans tous les dessins on suppose qu'il utilise la règle antimajoritaire (il choisit à l'instant $t + 1$ le vote minoritaire de ses voisins à l'instant t).
- les nœuds qui bouclent sur eux-mêmes (ils se considèrent comme leur propre voisin) sont marqués par un trait.



RÉSEAUX DE NEURONES



4

Pour modéliser les réseaux de neurones, Warren McCulloch et Walter Pitts ont imaginé en 1943 un modèle où l'état du neurone change en fonction des influx reçus de ses voisins : le neurone évalue le cumul de ses influx et s'il dépasse un certain seuil, spécifique du neurone, lui-même émet un influx. Ce modèle et ses variantes sont devenus importants en intelligence artificielle.

Voici une version précise de ce modèle pour lequel le théorème de la période 1 ou 2 de Goles et Olivos est vrai. Les neurones ou nœuds du graphe sont notés $N_1, N_2, \dots, N_k$. D'un instant à l'autre, le neurone N_i passe de l'état « non excité » (NON), dont la valeur est 0, à l'état « excité » (OUI), qui vaut 1, si la somme

des influx de ses voisins dépasse une valeur s_i , appelée seuil d'excitation. Cette somme peut être pondérée par des coefficients a_{ij} à condition que les coefficients de pondération soient symétriques ($a_{ij} = a_{ji}$). La règle pour passer d'un état à l'autre est : L'état du nœud N_i est excité à l'étape $t+1$ si la somme des produits $a_{ij} \times$ (valeur du nœud N_j à l'étape t) pour tous les N_j auquel N_i est relié dépasse le seuil s_i de ce nœud. En choisissant bien les seuils s_i et en prenant les a_{ij} égaux à 1 ou 0 selon que N_i est lié à N_j ou non, on retrouve le modèle de la dynamique majoritaire. Le théorème de la période 1 ou 2 est vrai pour ce modèle neuronal.

➤ quand n augmente et vérifie précisément que : la suite $nb(N, n)^{1/n}$ est bornée, et la limite de toute suite extraite convergente est inférieure à $1+1/D^-$ où D^- est le plus grand nombre pair strictement inférieur à D .

Cela est un peu dur à avaler... tout n'est pas toujours aussi simple qu'on le souhaiterait ! Heureusement, l'application à des cas particuliers est facile.

Considérons le quadrillage du plan. On a $D=4$, $D^-=2$, $1+1/D^-=3/2$. Le nombre de nœuds à distance au plus n d'un nœud N est $(n+1)^2+n^2$ (voir le dessin dans l'encadré 2). On vérifie que la suite numérique $nb(N, n)^{1/n} = ((n+1)^2+n^2)^{1/n}$ a pour limite 1, ce qui est inférieur à $3/2$. La condition (b) est donc vérifiée. Pour le graphe planaire infini du quadrillage du plan, le théorème de la période 1 ou 2 est donc vrai.

Il en va de même pour le réseau de l'espace composé de cubes où chaque nœud est lié à six nœuds, et pour bien d'autres graphes infinis... mais pas pour l'arbre binaire infini !

QUAND UN NŒUD EST NON CONFORMISTE

Venons-en maintenant aux résultats les plus récents qui envisagent l'introduction d'une sorte de mouton noir ne se soumettant pas à la règle majoritaire.

Le modèle considéré est un peu plus général que celui décrit plus haut, ce qui renforce d'ailleurs l'intérêt des résultats récents. Nous noterons $N_1, N_2, \dots, N_k$ les nœuds du graphe. Le nœud N_i sera le nœud non conformiste.

Sa décision de choisir OUI ou NON pour le jour $t+1$ est fondée sur un mécanisme précis qui ne dépend que des choix faits par ses voisins le jour t . L'individu non conformiste N_i a retenu certaines configurations de ses voisins, par exemple {voisin 1, voisin 2} et {voisin 2, voisin 3, voisin 4}, et si chaque voisin de l'une de ces configurations a choisi NON le jour t , N_i choisira NON le jour $t+1$. Dans tous les autres cas, N_i choisit OUI le jour $t+1$.

Les autres nœuds adoptent un principe de seuil qui généralise l'idée du vote majoritaire : pour $i > 1$, un nœud N_i choisit NON le jour $t+1$ si le nombre de ses voisins qui ont choisi NON le jour t est supérieur ou égal à un nombre fixé s_i (s_i est le seuil qui lui fait choisir de voter NON). Le seuil s_i dépend du nœud N_i , mais une fois ces seuils fixés, ils ne changent plus.

L'idée de ce modèle est que certains membres de la communauté sont plus conciliants que d'autres et sont donc plus facilement prêts à choisir OUI. Si par exemple chaque nœud possède 10 voisins, certains ne se décideront à choisir NON pour le jour $t+1$ que lorsque plus de 9 voisins auront choisi NON le jour t , alors que d'autres opteront pour le NON dès que 6 voisins auront choisi NON le jour t ; d'autres, plus enclins encore à un vote négatif,

LIENS DE DÉSACCORD ET LIENS AIGRES

5

Dans la démonstration du théorème de Goles et Olivos donnée à la fin de l'article, on utilise la notion de paire de nœuds aigres : (N, N') est aigre si N à l'instant t ne choisit pas la même chose que N' à l'instant $t+1$. On démontre que le nombre de paires de nœuds aigres diminue nécessairement et finit par se stabiliser. Cela semble un peu

compliqué et on aurait aimé simplifier la démonstration en établissant que le nombre de paires de nœuds (N, N') en désaccord (N et N' choisissent différemment à l'instant t) diminue. Il se trouve que c'est faux : le nombre de paires de nœuds en désaccord augmente parfois quand on applique la dynamique majoritaire. Le dessin illustre une telle situation.

NOMBRE DE PAIRES EN DÉSACCORD EN BLEU

NOMBRE DE PAIRES AIGRES EN VERT

