

RÉSEAUX DE NEURONES



4

Pour modéliser les réseaux de neurones, Warren McCulloch et Walter Pitts ont imaginé en 1943 un modèle où l'état du neurone change en fonction des influx reçus de ses voisins : le neurone évalue le cumul de ses influx et s'il dépasse un certain seuil, spécifique du neurone, lui-même émet un influx. Ce modèle et ses variantes sont devenus importants en intelligence artificielle.

Voici une version précise de ce modèle pour lequel le théorème de la période 1 ou 2 de Goles et Olivos est vrai. Les neurones ou nœuds du graphe sont notés $N_1, N_2, \dots, N_k$. D'un instant à l'autre, le neurone N_i passe de l'état « non excité » (NON), dont la valeur est 0, à l'état « excité » (OUI), qui vaut 1, si la somme

des influx de ses voisins dépasse une valeur s_i appelée seuil d'excitation. Cette somme peut être pondérée par des coefficients a_{ij} à condition que les coefficients de pondération soient symétriques ($a_{ij} = a_{ji}$). La règle pour passer d'un état à l'autre est : L'état du nœud N_i est excité à l'étape $t+1$ si la somme des produits $a_{ij} \times$ (valeur du nœud N_j à l'étape t) pour tous les N_j auquel N_i est relié dépasse le seuil s_i de ce nœud. En choisissant bien les seuils s_i et en prenant les a_{ij} égaux à 1 ou 0 selon que N_i est lié à N_j ou non, on retrouve le modèle de la dynamique majoritaire. Le théorème de la période 1 ou 2 est vrai pour ce modèle neuronal.

➤ quand n augmente et vérifie précisément que : la suite $nb(N, n)^{1/n}$ est bornée, et la limite de toute suite extraite convergente est inférieure à $1+1/D^-$ où D^- est le plus grand nombre pair strictement inférieur à D .

Cela est un peu dur à avaler... tout n'est pas toujours aussi simple qu'on le souhaiterait ! Heureusement, l'application à des cas particuliers est facile.

Considérons le quadrillage du plan. On a $D=4$, $D^-=2$, $1+1/D^-=3/2$. Le nombre de nœuds à distance au plus n d'un nœud N est $(n+1)^2 + n^2$ (voir le dessin dans l'encadré 2). On vérifie que la suite numérique $nb(N, n)^{1/n} = ((n+1)^2 + n^2)^{1/n}$ a pour limite 1, ce qui est inférieur à $3/2$. La condition (b) est donc vérifiée. Pour le graphe planaire infini du quadrillage du plan, le théorème de la période 1 ou 2 est donc vrai.

Il en va de même pour le réseau de l'espace composé de cubes où chaque nœud est lié à six nœuds, et pour bien d'autres graphes infinis... mais pas pour l'arbre binaire infini !

QUAND UN NŒUD EST NON CONFORMISTE

Venons-en maintenant aux résultats les plus récents qui envisagent l'introduction d'une sorte de mouton noir ne se soumettant pas à la règle majoritaire.

Le modèle considéré est un peu plus général que celui décrit plus haut, ce qui renforce d'ailleurs l'intérêt des résultats récents. Nous noterons $N_1, N_2, \dots, N_k$ les nœuds du graphe. Le nœud N_i sera le nœud non conformiste.

Sa décision de choisir OUI ou NON pour le jour $t+1$ est fondée sur un mécanisme précis qui ne dépend que des choix faits par ses voisins le jour t . L'individu non conformiste N_i a retenu certaines configurations de ses voisins, par exemple {voisin 1, voisin 2} et {voisin 2, voisin 3, voisin 4}, et si chaque voisin de l'une de ces configurations a choisi NON le jour t , N_i choisira NON le jour $t+1$. Dans tous les autres cas, N_i choisit OUI le jour $t+1$.

Les autres nœuds adoptent un principe de seuil qui généralise l'idée du vote majoritaire : pour $i > 1$, un nœud N_i choisit NON le jour $t+1$ si le nombre de ses voisins qui ont choisi NON le jour t est supérieur ou égal à un nombre fixé s_i (s_i est le seuil qui lui fait choisir de voter NON). Le seuil s_i dépend du nœud N_i , mais une fois ces seuils fixés, ils ne changent plus.

L'idée de ce modèle est que certains membres de la communauté sont plus conciliants que d'autres et sont donc plus facilement prêts à choisir OUI. Si par exemple chaque nœud possède 10 voisins, certains ne se décideront à choisir NON pour le jour $t+1$ que lorsque plus de 9 voisins auront choisi NON le jour t , alors que d'autres opteront pour le NON dès que 6 voisins auront choisi NON le jour t ; d'autres, plus enclins encore à un vote négatif,

LIENS DE DÉSACCORD ET LIENS AIGRES

5

Dans la démonstration du théorème de Goles et Olivos donnée à la fin de l'article, on utilise la notion de paire de nœuds aigres : (N, N') est aigre si N à l'instant t ne choisit pas la même chose que N' à l'instant $t+1$. On démontre que le nombre de paires de nœuds aigres diminue nécessairement et finit par se stabiliser. Cela semble un peu

compliqué et on aurait aimé simplifier la démonstration en établissant que le nombre de paires de nœuds (N, N') en désaccord (N et N' choisissent différemment à l'instant t) diminue. Il se trouve que c'est faux : le nombre de paires de nœuds en désaccord augmente parfois quand on applique la dynamique majoritaire. Le dessin illustre une telle situation.

NOMBRE DE PAIRES EN DÉSACCORD EN BLEU

NOMBRE DE PAIRES AIGRES EN VERT

