

RÉSEAUX DE NEURONES



4

Pour modéliser les réseaux de neurones, Warren McCulloch et Walter Pitts ont imaginé en 1943 un modèle où l'état du neurone change en fonction des influx reçus de ses voisins : le neurone évalue le cumul de ses influx et s'il dépasse un certain seuil, spécifique du neurone, lui-même émet un influx. Ce modèle et ses variantes sont devenus importants en intelligence artificielle.

Voici une version précise de ce modèle pour lequel le théorème de la période 1 ou 2 de Goles et Olivos est vrai. Les neurones ou nœuds du graphe sont notés $N_1, N_2, \dots, N_k$. D'un instant à l'autre, le neurone N_i passe de l'état « non excité » (NON), dont la valeur est 0, à l'état « excité » (OUI), qui vaut 1, si la somme

des influx de ses voisins dépasse une valeur s_i appelée seuil d'excitation. Cette somme peut être pondérée par des coefficients a_{ij} à condition que les coefficients de pondération soient symétriques ($a_{ij} = a_{ji}$). La règle pour passer d'un état à l'autre est : L'état du nœud N_i est excité à l'étape $t+1$ si la somme des produits $a_{ij} \times$ (valeur du nœud N_j à l'étape t) pour tous les N_j auquel N_i est relié dépasse le seuil s_i de ce nœud. En choisissant bien les seuils s_i et en prenant les a_{ij} égaux à 1 ou 0 selon que N_i est lié à N_j ou non, on retrouve le modèle de la dynamique majoritaire. Le théorème de la période 1 ou 2 est vrai pour ce modèle neuronal.

> quand n augmente et vérifie précisément que : la suite $nb(N, n)^{1/n}$ est bornée, et la limite de toute suite extraite convergente est inférieure à $1+1/D^-$ où D^- est le plus grand nombre pair strictement inférieur à D .

Cela est un peu dur à avaler... tout n'est pas toujours aussi simple qu'on le souhaiterait ! Heureusement, l'application à des cas particuliers est facile.

Considérons le quadrillage du plan. On a $D=4$, $D^-=2$, $1+1/D^-=3/2$. Le nombre de nœuds à distance au plus n d'un nœud N est $(n+1)^2 + n^2$ (voir le dessin dans l'encadré 2). On vérifie que la suite numérique $nb(N, n)^{1/n} = ((n+1)^2 + n^2)^{1/n}$ a pour limite 1, ce qui est inférieur à $3/2$. La condition (b) est donc vérifiée. Pour le graphe planaire infini du quadrillage du plan, le théorème de la période 1 ou 2 est donc vrai.

Il en va de même pour le réseau de l'espace composé de cubes où chaque nœud est lié à six nœuds, et pour bien d'autres graphes infinis... mais pas pour l'arbre binaire infini !

QUAND UN NŒUD EST NON CONFORMISTE

Venons-en maintenant aux résultats les plus récents qui envisagent l'introduction d'une sorte de mouton noir ne se soumettant pas à la règle majoritaire.

Le modèle considéré est un peu plus général que celui décrit plus haut, ce qui renforce d'ailleurs l'intérêt des résultats récents. Nous noterons $N_1, N_2, \dots, N_k$ les nœuds du graphe. Le nœud N_1 sera le nœud non conformiste.

Sa décision de choisir OUI ou NON pour le jour $t+1$ est fondée sur un mécanisme précis qui ne dépend que des choix faits par ses voisins le jour t . L'individu non conformiste N_1 a retenu certaines configurations de ses voisins, par exemple {voisin 1, voisin 2} et {voisin 2, voisin 3, voisin 4}, et si chaque voisin de l'une de ces configurations a choisi NON le jour t , N_1 choisira NON le jour $t+1$. Dans tous les autres cas, N_1 choisit OUI le jour $t+1$.

Les autres nœuds adoptent un principe de seuil qui généralise l'idée du vote majoritaire : pour $i > 1$, un nœud N_i choisit NON le jour $t+1$ si le nombre de ses voisins qui ont choisi NON le jour t est supérieur ou égal à un nombre fixé s_i (s_i est le seuil qui lui fait choisir de voter NON). Le seuil s_i dépend du nœud N_i , mais une fois ces seuils fixés, ils ne changent plus.

L'idée de ce modèle est que certains membres de la communauté sont plus conciliants que d'autres et sont donc plus facilement prêts à choisir OUI. Si par exemple chaque nœud possède 10 voisins, certains ne se décideront à choisir NON pour le jour $t+1$ que lorsque plus de 9 voisins auront choisi NON le jour t , alors que d'autres opteront pour le NON dès que 6 voisins auront choisi NON le jour t ; d'autres, plus enclins encore à un vote négatif,

LIENS DE DÉSACCORD ET LIENS AIGRES

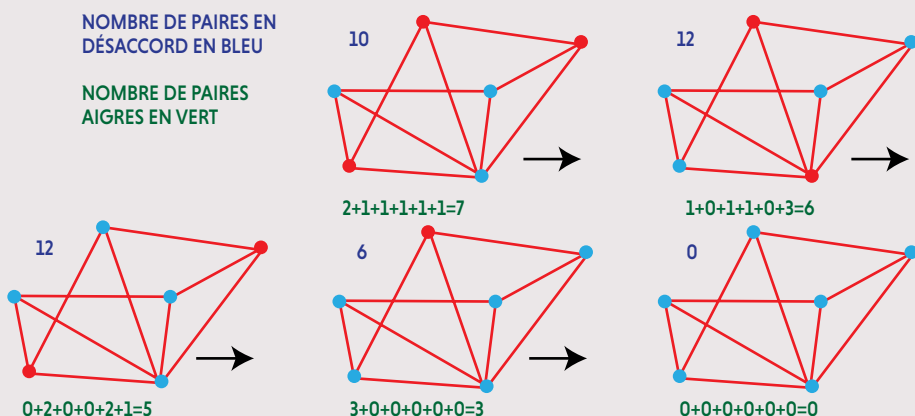
5

Dans la démonstration du théorème de Goles et Olivos donnée à la fin de l'article, on utilise la notion de paire de nœuds aigres : (N, N') est aigre si N à l'instant t ne choisit pas la même chose que N' à l'instant $t+1$. On démontre que le nombre de paires de nœuds aigres diminue nécessairement et finit par se stabiliser. Cela semble un peu

compliqué et on aurait aimé simplifier la démonstration en établissant que le nombre de paires de nœuds (N, N') en désaccord (N et N' choisissent différemment à l'instant t) diminue. Il se trouve que c'est faux : le nombre de paires de nœuds en désaccord augmente parfois quand on applique la dynamique majoritaire. Le dessin illustre une telle situation.

NOMBRE DE PAIRES EN DÉSACCORD EN BLEU

NOMBRE DE PAIRES AIGRES EN VERT



BIBLIOGRAPHIE

E. Cruciani et al., **Phase transition of the 2-choices dynamics on core-periphery networks**, prépublication arXiv:1804.07223, 2018.

J. Haslegrave et C. Cannings, **Majority dynamics with one nonconformist**, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 219, pp. 32-39, 2017.

I. Benjamini et al., **Convergence, unanimity and disagreement in majority dynamics on unimodular graphs and random graphs**, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 126(9), pp. 2719-2733, 2016.

Y. Ginosar et R. Holzman, **The majority action on infinite graphs: strings and puppets**, *Discrete Mathematics*, vol. 215(1-3), pp. 59-71, 2000.

G. Moran, **On the period-two-property of the majority operator in infinite graphs**, *Transactions of the AMS*, vol. 347(5), pp. 1649-1667, 1995.

E. Goles et J. Olivos, **Comportement périodique des fonctions à seuil binaires et applications**, *Discrete Applied Math.*, vol. 3, pp. 93-105, 1981; **Periodic behaviour of generalized threshold functions**, *Discrete Mathematics*, vol. 30(2), pp. 187-189, 1980.

choisiront NON dès que deux de leurs voisins auront choisi NON le jour t .

Voici les théorèmes récents qui généralisent le théorème de la période 1 ou 2.

(A) Si l'on accepte que deux voisins de N_i soient eux-mêmes voisins (présence d'un triangle N_i, N_p, N_j), alors la présence d'un nœud non conformiste rend possible toute longueur de cycle. Pour avoir la période 3, il faut que N_i soit voisin de lui-même (boucle).

(B) Si deux voisins de N_i ne sont jamais voisins (pas de triangle N_i, N_p, N_j), et qu'un nœud n'est jamais considéré comme voisin de lui-même, alors, quelle que soit la règle appliquée par le nœud non conformiste N_i et quels que soient les seuils choisis par les autres nœuds, seuls des cycles de longueur 1, 2 ou 4 sont possibles.

(C) Sous les mêmes conditions, mais en acceptant maintenant qu'un nœud puisse être son propre voisin (boucle), les longueurs des cycles possibles sont tous les entiers de la liste 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12.

(D) Dans le cas où le nœud N_i suit une règle d'antimajorité, il choisit le jour $t+1$ ce qui était minoritaire chez ses voisins le jour t , et maintenant même si deux de ses voisins sont liés, les cycles possibles sont : 1, 2, 4, 5, 6 et 10 quand il n'y a pas de boucle.

(E) Il faut ajouter 3 et 8 si les boucles sont autorisées.

Les chercheurs ont par ailleurs établi que ces résultats sont les meilleurs possibles en montrant qu'en respectant les hypothèses des théorèmes, chacune des longueurs de cycles énumérées se produit réellement.

L'encadré 3 donne des exemples de ces extraordinaires situations où des longueurs de cycles autres que 1 et 2 se produisent.

COMMENT PROUVER CE GENRE DE CHOSES ?

À titre d'exemple, voici, pour les plus courageux, en évitant toute formule et en simplifiant au maximum, la démonstration de la forme envisagée au début de cet article du résultat de Goles et Olivos.

Contexte. On se donne un graphe fini indiquant les liens entre personnes d'une communauté. Chaque nœud du graphe a un avis OUI ou NON à l'instant t . De l'instant t à l'instant $t+1$, chaque nœud peut changer d'avis. Quand plus de la moitié de ses voisins sont d'avis contraire au sien, il prend alors l'avis de cette majorité de voisins. En cas d'égalité, il conserve son avis.

Affirmation. Au bout d'un certain temps, ce mécanisme conduit à une stabilisation de tous les avis, ou alors à une oscillation des avis entre deux états, autrement dit le graphe reprend le même état exactement au bout des deux étapes.

Démonstration. On dit qu'un couple de nœuds (N, N') est «aigre entre l'instant t et l'instant $t+1$ » si N et N' sont reliés et que N à l'instant t a un avis différent de N' à l'instant $t+1$ (attention: on ne considère pas le même instant pour N et N').

Montrons qu'il y a stabilité ou décroissance quand on passe du nombre de couples aigres entre $t-1$ et t au nombre de couples aigres entre t et $t+1$.

Considérons un nœud particulier N , fixé. Soit m le nombre de couples (N, N') aigres entre $t-1$ et t . Et soit n le nombre de couples (N', N) aigres entre t et $t+1$. Nous allons montrer que $m \geq n$.

Cas 1. Supposons que N ne change pas d'avis entre $t-1$ et $t+1$. Alors, nécessairement: $n=m$. En effet, si N a le même avis à l'instant $t-1$ et à l'instant $t+1$ (nous l'avons supposé) et si N' est lié à N , alors N à l'instant $t-1$ a un avis différent de N' à l'instant t si et seulement si N' à l'instant t a un avis différent de N à l'instant $t+1$.

Cas 2. Supposons que N change d'avis entre l'instant $t-1$ et l'instant $t+1$. Deux cas sont possibles.

(a) N a gardé le même avis entre $t-1$ et t , et a changé d'avis entre t et $t+1$. À l'instant t , N était donc entouré de plus de nœuds ayant un avis différent du sien que de nœuds ayant le même avis que le sien. Il y avait donc plus de la moitié des couples (N, N') liés qui étaient aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t et moins de la moitié des couples (N', N) qui étaient aigres entre t et $t+1$. C'est donc que $n < m$.

(b) N a changé d'avis entre $t-1$ et t , et l'a gardé entre t et $t+1$. Si N a gardé le même avis entre l'instant t et l'instant $t+1$, c'est qu'à l'instant t , il y avait plus de nœuds N' liés à N qui étaient de son avis (contraire à celui qu'il avait à l'instant $t-1$), disons k , que de nœuds voisins ayant un avis différent, disons h : $k > h$. On remarque alors que $m=k$ et $n=h$. On a donc $n < m$.

Si N change d'avis entre $t-1$ et $t+1$ on a donc toujours $n < m$. Le regroupement des cas 1 et 2 signifie que $n \leq m$.

Le nœud N était fixé. Faisons-le varier. On obtient que le nombre total de couples (N', N) aigres entre l'instant t et l'instant $t+1$ (c'est la somme des n associés à chaque nœud N) est inférieur ou égal au nombre total des couples (N, N') aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t (qui est la somme des m associés à chaque nœud N). Le nombre de couples aigres entre t et $t+1$ est donc inférieur ou égal au nombre de couples aigres entre $t-1$ et t . Dit autrement, le nombre de couples aigres décroît ou reste stable.

Ce nombre total ne peut décroître indéfiniment; arrive donc un moment où il se stabilise. Quand il est stabilisé, le cas 2 ne se produit plus, donc chaque nœud d'un instant $t-1$ à l'instant $t+1$ garde le même avis. CQFD. ■