

BIBLIOGRAPHIE

E. Cruciani et al., **Phase transition of the 2-choices dynamics on core-periphery networks**, prépublication arXiv:1804.07223, 2018.

J. Haslegrave et C. Cannings, **Majority dynamics with one nonconformist**, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 219, pp. 32-39, 2017.

I. Benjamini et al., **Convergence, unanimity and disagreement in majority dynamics on unimodular graphs and random graphs**, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 126(9), pp. 2719-2733, 2016.

Y. Ginosar et R. Holzman, **The majority action on infinite graphs: strings and puppets**, *Discrete Mathematics*, vol. 215(1-3), pp. 59-71, 2000.

G. Moran, **On the period-two-property of the majority operator in infinite graphs**, *Transactions of the AMS*, vol. 347(5), pp. 1649-1667, 1995.

E. Goles et J. Olivos, **Comportement périodique des fonctions à seuil binaires et applications**, *Discrete Applied Math.*, vol. 3, pp. 93-105, 1981 ; **Periodic behaviour of generalized threshold functions**, *Discrete Mathematics*, vol. 30(2), pp. 187-189, 1980.

choisiront NON dès que deux de leurs voisins auront choisi NON le jour t .

Voici les théorèmes récents qui généralisent le théorème de la période 1 ou 2.

(A) Si l'on accepte que deux voisins de N_i soient eux-mêmes voisins (présence d'un triangle N_i, N_p, N_p), alors la présence d'un nœud non conformiste rend possible toute longueur de cycle. Pour avoir la période 3, il faut que N_i soit voisin de lui-même (boucle).

(B) Si deux voisins de N_i ne sont jamais voisins (pas de triangle N_i, N_p, N_p), et qu'un nœud n'est jamais considéré comme voisin de lui-même, alors, quelle que soit la règle appliquée par le nœud non conformiste N_i et quels que soient les seuils choisis par les autres nœuds, seuls des cycles de longueur 1, 2 ou 4 sont possibles.

(C) Sous les mêmes conditions, mais en acceptant maintenant qu'un nœud puisse être son propre voisin (boucle), les longueurs des cycles possibles sont tous les entiers de la liste 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12.

(D) Dans le cas où le nœud N_i suit une règle d'antimajorité, il choisit le jour $t+1$ ce qui était minoritaire chez ses voisins le jour t , et maintenant même si deux de ses voisins sont liés, les cycles possibles sont : 1, 2, 4, 5, 6 et 10 quand il n'y a pas de boucle.

(E) Il faut ajouter 3 et 8 si les boucles sont autorisées.

Les chercheurs ont par ailleurs établi que ces résultats sont les meilleurs possibles en montrant qu'en respectant les hypothèses des théorèmes, chacune des longueurs de cycles énumérées se produit réellement.

L'encadré 3 donne des exemples de ces extraordinaires situations où des longueurs de cycles autres que 1 et 2 se produisent.

COMMENT PROUVER CE GENRE DE CHOSES ?

À titre d'exemple, voici, pour les plus courageux, en évitant toute formule et en simplifiant au maximum, la démonstration de la forme envisagée au début de cet article du résultat de Goles et Olivos.

Contexte. On se donne un graphe fini indiquant les liens entre personnes d'une communauté. Chaque nœud du graphe a un avis OUI ou NON à l'instant t . De l'instant t à l'instant $t+1$, chaque nœud peut changer d'avis. Quand plus de la moitié de ses voisins sont d'avis contraire au sien, il prend alors l'avis de cette majorité de voisins. En cas d'égalité, il conserve son avis.

Affirmation. Au bout d'un certain temps, ce mécanisme conduit à une stabilisation de tous les avis, ou alors à une oscillation des avis entre deux états, autrement dit le graphe reprend le même état exactement au bout des deux étapes.

Démonstration. On dit qu'un couple de nœuds (N, N') est «aigre entre l'instant t et l'instant $t+1$ » si N et N' sont reliés et que N à l'instant t a un avis différent de N' à l'instant $t+1$ (attention: on ne considère pas le même instant pour N et N').

Montrons qu'il y a stabilité ou décroissance quand on passe du nombre de couples aigres entre $t-1$ et t au nombre de couples aigres entre t et $t+1$.

Considérons un nœud particulier N , fixé. Soit m le nombre de couples (N, N') aigres entre $t-1$ et t . Et soit n le nombre de couples (N', N) aigres entre t et $t+1$. Nous allons montrer que $m \geq n$.

Cas 1. Supposons que N ne change pas d'avis entre $t-1$ et $t+1$. Alors, nécessairement: $n=m$. En effet, si N a le même avis à l'instant $t-1$ et à l'instant $t+1$ (nous l'avons supposé) et si N' est lié à N , alors N à l'instant $t-1$ a un avis différent de N' à l'instant t si et seulement si N' à l'instant t a un avis différent de N à l'instant $t+1$.

Cas 2. Supposons que N change d'avis entre l'instant $t-1$ et l'instant $t+1$. Deux cas sont possibles.

(a) N a gardé le même avis entre $t-1$ et t , et a changé d'avis entre t et $t+1$. À l'instant t , N était donc entouré de plus de nœuds ayant un avis différent du sien que de nœuds ayant le même avis que le sien. Il y avait donc plus de la moitié des couples (N, N') liés qui étaient aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t et moins de la moitié des couples (N', N) qui étaient aigres entre t et $t+1$. C'est donc que $n < m$.

(b) N a changé d'avis entre $t-1$ et t , et l'a gardé entre t et $t+1$. Si N a gardé le même avis entre l'instant t et l'instant $t+1$, c'est qu'à l'instant t , il y avait plus de nœuds N' liés à N qui étaient de son avis (contraire à celui qu'il avait à l'instant $t-1$), disons k , que de nœuds voisins ayant un avis différent, disons h : $k > h$. On remarque alors que $m=k$ et $n=h$. On a donc $n < m$.

Si N change d'avis entre $t-1$ et $t+1$ on a donc toujours $n < m$. Le regroupement des cas 1 et 2 signifie que $n \leq m$.

Le nœud N était fixé. Faisons-le varier. On obtient que le nombre total de couples (N', N) aigres entre l'instant t et l'instant $t+1$ (c'est la somme des n associés à chaque nœud N) est inférieur ou égal au nombre total des couples (N, N') aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t (qui est la somme des m associés à chaque nœud N). Le nombre de couples aigres entre t et $t+1$ est donc inférieur ou égal au nombre de couples aigres entre $t-1$ et t . Dit autrement, le nombre de couples aigres décroît ou reste stable.

Ce nombre total ne peut décroître indéfiniment; arrive donc un moment où il se stabilise. Quand il est stabilisé, le cas 2 ne se produit plus, donc chaque nœud d'un instant $t-1$ à l'instant $t+1$ garde le même avis. CQFD. ■

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

L'ARAIGNÉE, UN GUIDE POUR L'HUMANITÉ

Au palais de Tokyo, à Paris, Tomás Saraceno installe ses œuvres, qui, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, entre art, science et architecture, nous obligent à repenser nos liens avec le monde. Les araignées y ont la part belle !

La Maman de Louise Bourgeois, l'Araignée Rouge d'Alexander Calder, La Princesse conçue par François Delarozière... En art (comme en science-fiction d'ailleurs), les araignées ont la fâcheuse tendance à être monumentales : chacune des œuvres citées ci-dessus fait plus de 10 mètres ! Ce n'est pas le cas avec l'artiste argentin Tomás Saraceno, à qui le palais de Tokyo, à Paris, offre carte blanche. Ses araignées sont d'une taille de l'ordre du centimètre. Et pour cause, ce sont des vraies !

Parmi les œuvres que propose l'exposition « On Air » (plus d'une quinzaine), les arachnides occupent une place de choix. Ainsi, *Event Horizon* donne à entendre les vibrations émises par *Holocnemus pluchei*, une araignée hôte des sous-sols du palais de Tokyo, à la toile de laquelle sont transmis, en direct, les signaux captés par l'antenne *Virgo* de l'observatoire gravitationnel européen. Cet animal très sensible serait-il capable de détecter les ondes gravitationnelles ? C'est le pari de l'artiste.

Webs of at-tent(s)ion rassemble, dans une grande salle obscure, 76 toiles d'araignées (voir la photographie ci-contre) de diverses espèces. Certaines sont reliées à des microphones qui amplifient et rendent audibles les vibrations qui les parcourent.

Dans *Sounding the Air*, cinq filaments de soie d'araignée flottent et résonnent dans l'air en fonction des mouvements invisibles de l'air provoqués par les

Une toile d'araignée ?
Plutôt une extension
de l'appareil sensoriel
de l'animal, par laquelle
son univers s'agrandit !

changements de température, le flux des visiteurs et leur respiration.

Un dernier ? Le film *Living at the Bottom of the Ocean of Air* montre une argyronète *Argyroneta aquatica*, une araignée qui vit sous l'eau, respirant grâce à une bulle d'air enveloppant son abdomen.

Pourquoi tant d'araignées ? Selon Tomás Saraceno, leurs toiles constituent certes leur habitat mais plus encore le prolongement de leur corps et particulièrement de leur appareil sensoriel. Les fils de soie deviennent ainsi pour l'arthropode des oreilles, des yeux... De même, l'art doit augmenter notre attention à ce qui se passe autour de nous, dans le monde en pleine





mutation et confronté aux défis du réchauffement climatique, de la sixième extinction de masse, de la pollution croissante. Ainsi, l'argyronète nous invite à nous adapter à de nouveaux environnements.

Il s'agit de s'intéresser à l'infime, à ce que l'on néglige le plus souvent, et donc à ces petites araignées, mais aussi, au travers d'autres œuvres, aux poussières, aux particules cosmiques, aux fréquences radio... L'objectif est de mieux saisir et comprendre le monde, l'habiter et en fin de compte le préserver.

Pour développer ses créations, Tomás Saraceno s'entoure de biologistes, d'astrophysiciens, de philosophes, d'éthologues,

de sociologues... exerçant dans des institutions prestigieuses. Ensemble, ils mènent des projets à la frontière de la science et de l'art. Ainsi, le film *The Politics of Solar Rhythms (Cosmic Levitation)*, réalisé en collaboration avec l'équipe de Heinrich Jaeger, de l'université de Chicago, montre des particules de poussières s'agréant sous l'effet de vibrations.

Autre exemple. Dans l'une des vitrines de l'exposition, on découvre *Aerocene Float Predictor* («prédicteur de vol aérocène»), un outil permettant de planifier un voyage dans les airs avec la seule force du vent, sans hélium ni hydrogène ou batterie électrique.

Sans qu'il y soit fait référence, les araignées qui pratiquent le *ballooning* ont déjà inventé leur propre aérocène: en laissant au vent un fil de soie, elles sont emportées sur parfois plusieurs centaines de kilomètres de distance. Pour voir le monde différemment, les araignées ont tant de choses à nous apprendre! ■

Carte blanche à Tomás Saraceno, « On Air », palais de Tokyo, Paris, jusqu'au 6 janvier 2019.
www.palaisdetokyo.com/fr/evenement/air



L'auteur a récemment publié :
Pollock, Turner, Van Gogh, Vermeer et la science...
(Belin, 2018).