

L'ESSENTIEL

> Il y a environ deux siècles, Joseph Fourier a proposé une méthode puissante pour résoudre l'équation de propagation de la chaleur.

> Cette méthode consiste à représenter une fonction f sous la forme d'une somme de sinusoides, pondérées par des coefficients numériques qui se calculent à partir de f .

> Cet outil mathématique permet de représenter avec une bonne approximation un signal de durée finie à l'aide d'un nombre limité de coefficients.

> Les raffinements successifs de l'analyse de Fourier, notamment avec les représentations par ondelettes, sont au cœur des technologies numériques d'aujourd'hui.

LES AUTEURS



PATRICK FLANDRIN
physicien à l'École
normale supérieure
de Lyon



STÉPHANE JAFFARD
mathématicien
à l'université
Paris-Est Créteil
Val-de-Marne



JEAN-MICHEL MOREL
mathématicien
à l'École normale
supérieure
Paris-Saclay

L'analyse de Fourier, pilier du numérique

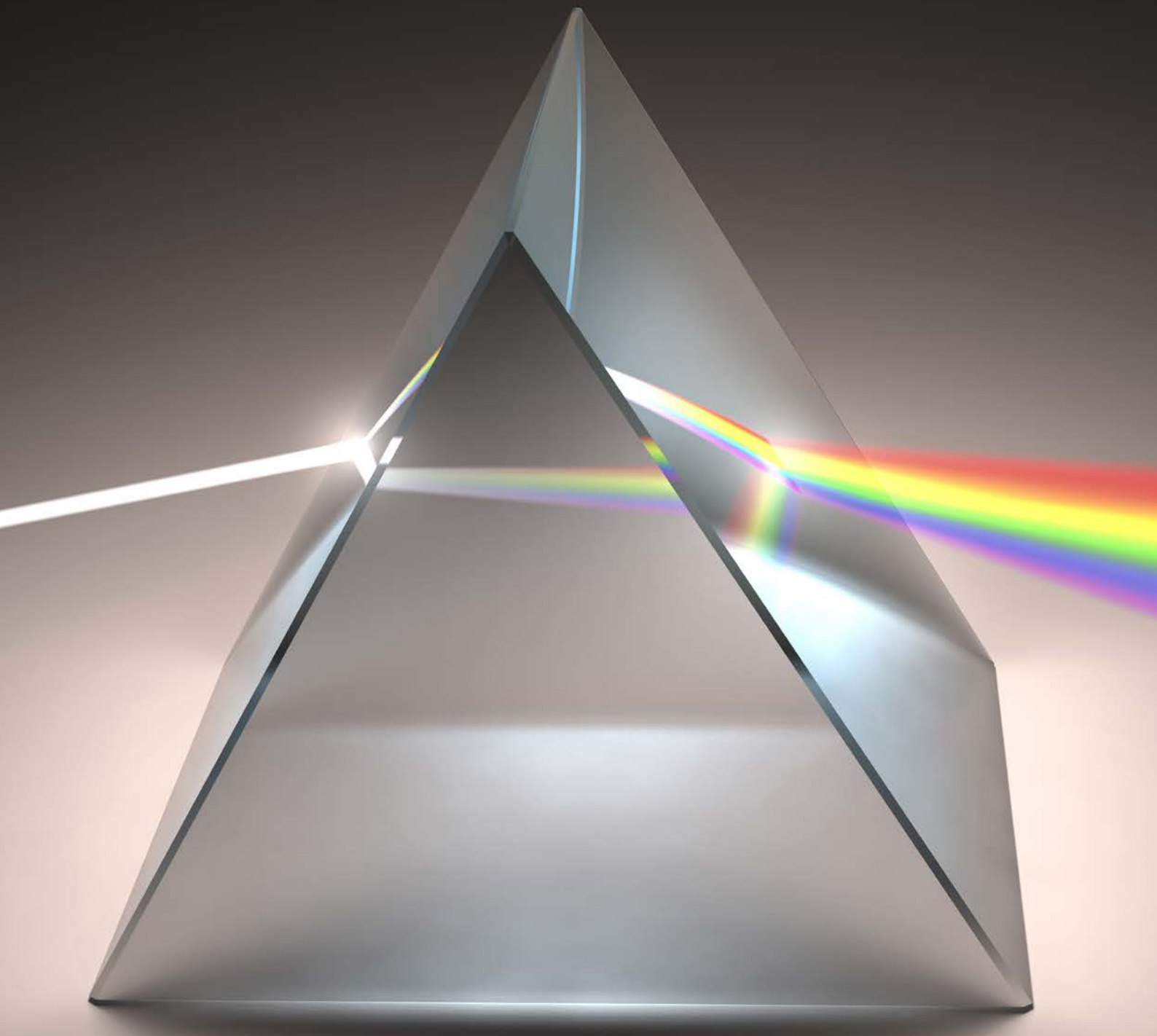
Représenter une fonction ou un signal quelconque sous la forme d'une somme de fonctions élémentaires et aisément calculables : telle est la philosophie qui sous-tend la méthode mathématique mise au point au début du XIX^e siècle par Joseph Fourier. Cet outil universel a connu plusieurs avatars récents qui lui donnent un rôle clé dans la révolution numérique en cours.

De nombreuses commémorations du 250^e anniversaire de la naissance de Joseph Fourier ont jalonné l'année 2018. Ce mathématicien, physicien, administrateur et égyptologue a publié en 1822 un mémoire, intitulé *Théorie analytique de la chaleur*, qui a placé son nom au panthéon de la science. Les méthodes et outils qu'il y introduisait ont constitué une avancée considérable pour la physique mathématique et la physique théorique. Mais leur portée va bien au-delà : les techniques de traitement du signal qui en sont issues sont aujourd'hui utilisées massivement dans toutes les sciences et technologies du numérique, du codage de la voix dans les téléphones portables à la transmission des images par Internet.

En fait, l'«analyse de Fourier» est au cœur de la révolution numérique actuelle. Et même si elle est âgée de plus de deux siècles, elle continue à se développer et se perfectionner, comme nous allons le voir.

L'expression «analyse de Fourier» désigne les méthodes introduites par Fourier pour représenter une fonction quelconque sous la forme d'une somme de fonctions élémentaires. L'idée remonte au XVIII^e siècle et au savant suisse Daniel Bernoulli, qui cherchait à résoudre l'équation régissant la propagation des vibrations le long d'une corde (c'est-à-dire une version de l'équation des ondes, voir la figure page 56).

Dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier développait une théorie décrivant la propagation de la chaleur, et aboutissait à une équation générale à laquelle ce processus obéit. Pour résoudre cette équation, Fourier ➤



Un prisme décompose un faisceau lumineux en ses différentes composantes colorées, chaque couleur correspondant à une onde lumineuse de fréquence bien déterminée. L'analyse de Fourier est un outil mathématique qui réalise une opération tout à fait analogue : il décompose un signal f quelconque (ou presque) en une somme de fonctions sinusoïdales, pondérées par des coefficients dits de Fourier.