

> entreprit, à la suite de Daniel Bernoulli, de représenter toute fonction  $f(x)$  comme une somme (une « série ») de fonctions sinusoïdales, éventuellement en nombre infini : les fonctions du type  $\sin(nx)$  où  $n$  est un nombre entier positif arbitraire. Il remarqua que quand la répartition initiale de la température est décrite par de telles sinusoïdes, les calculs d'une solution de l'équation de propagation de la chaleur se simplifient considérablement.

## L'ATOUT DES FONCTIONS SINUSOÏDALES

L'atout des fonctions sinusoïdales dans ce contexte tient à la conjonction de deux propriétés. La première est que les équations considérées sont « linéaires ». Qu'est-ce que cela signifie ? Les fonctions  $f$  qui y jouent le rôle d'inconnues n'apparaissent qu'au premier degré : il n'y a pas de termes comportant une puissance de  $f$  autre que 1, par exemple des termes en  $f^2$  ou en  $1/f$ . Il s'ensuit que ces équations sont linéaires, c'est-à-dire que si l'on a deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  obéissant à l'équation, alors toute fonction de la forme  $af_1 + bf_2$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres quelconques, est aussi une solution de cette équation. Cette propriété fondamentale de linéarité se retrouve dans de très nombreuses équations de la physique, au moins quand on décrit les phénomènes en première approximation.

Il s'agit généralement d'équations différentielles (équations où la fonction inconnue intervient avec ses dérivées), et à la linéarité de celles-ci s'ajoute l'autre propriété fondamentale : les fonctions sinusoïdales sont proportionnelles à l'opposé de leur dérivée seconde. En effet, la dérivée seconde (par rapport à  $x$ ) de  $\sin(ax)$  est égale à  $-a^2 \sin(ax)$ .

Pour illustrer l'intérêt de ces fonctions, supposons que l'on cherche à résoudre l'équation linéaire  $f''(x) = \sin(x) + 2\sin(3x)$  (c'est un exemple, à une dimension, d'équation de Poisson) où  $f''$  désigne la dérivée seconde de

Quelques-unes des équations fondamentales de la physique sont indiquées ici dans leur version la plus simple (sans coefficients numériques). Ici,  $t$  désigne le temps,  $x, y, z$  les coordonnées d'espace, et  $f$  représente une fonction  $f(x, y, z, t)$  dont la valeur dépend de la position  $(x, y, z)$  et de l'instant  $t$ . La notation  $\partial f / \partial x$  désigne la dérivée (dite partielle) de  $f$  par rapport à la variable  $x$ , et  $\partial^2 f / \partial x^2$  désigne la dérivée seconde de  $f$  par rapport à  $x$ . Les équations de Laplace et de Poisson interviennent notamment en mécanique des fluides incompressibles et en électrostatique. Comme leur nom l'indique, l'équation des ondes régit la propagation des ondes, et celle de la chaleur régit la propagation de la chaleur. Grâce à la linéarité de ces équations, l'analyse de Fourier permet de les étudier, voire de les résoudre, efficacement.

ÉQUATION DE LAPLACE  $\Delta f = 0$

où  $\Delta f$  désigne le laplacien de  $f$ , défini par : 
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ÉQUATION DE POISSON (où  $g$  est une fonction donnée)  $\Delta f = g$

ÉQUATION DES ONDES 
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR 
$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}$$

la fonction inconnue  $f$ . On peut alors chercher une solution  $f$  de la forme :

$$f(x) = a \sin(x) + b \sin(3x).$$

Comme on a  $\sin''(x) = -\sin(x)$  et  $(\sin(3x))'' = -9 \sin(3x)$ , l'équation devient :

$$f''(x) = -a \sin(x) - 9b \sin(3x) = \sin(x) + 2 \sin(3x).$$

On obtient donc une solution en égalisant les coefficients des sinusoïdes des deux côtés de l'équation, ce qui donne  $a = -1$  et  $b = -2/9$ .

Pour que le procédé puisse s'appliquer de façon générale, il faut démontrer l'universalité de la décomposition en série de sinusoïdes d'une fonction  $f$  quelconque, et surtout disposer d'une formule de calcul des coefficients de la décomposition. C'est à cette formule fondamentale que Fourier parvient dans son ouvrage. Si l'on considère une fonction

## LA TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE

**L**e calcul direct de la transformée de Fourier d'un signal discret de  $N$  échantillons (c'est-à-dire défini par la donnée de  $N$  valeurs numériques consécutives) nécessite de l'ordre de  $N^2$  opérations, ce qui devient rapidement prohibitif lorsque  $N$  est grand. Il existe cependant des algorithmes plus rapides, dits de FFT (pour *Fast Fourier Transform*). Le plus célèbre est celui proposé en 1965 par James Cooley et John Tukey lorsque

$N$  est une puissance de 2. En appliquant récursivement une stratégie faisant porter le calcul sur des séquences de taille moitié, cet algorithme réduit la complexité du calcul à un nombre d'opérations de l'ordre de  $N \log_2 N$ . Ainsi, on gagne un facteur 32 pour un signal de  $N = 256$  échantillons. Le facteur de gain dépasse 4 000 lorsque  $N = 65\,536$  (soit  $2^{16}$ ) ; il est d'autant plus élevé que  $N$  est grand. L'avènement de la FFT a été

fondamental pour la mise en œuvre pratique et à grande échelle de méthodes fondées sur la transformation de Fourier. La FFT est vraisemblablement le second algorithme le plus utilisé au monde, juste après l'algorithme de tri (*Quick sort* ou *Merge sort*) utilisé pour stocker ou récupérer des données dans les mémoires informatiques.