

La méthode de Fourier s'applique aussi aux fonctions de plusieurs variables

quelconque (mais suffisamment régulière) $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, \pi]$, elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \dots + a_n \sin(nx) + \dots$$

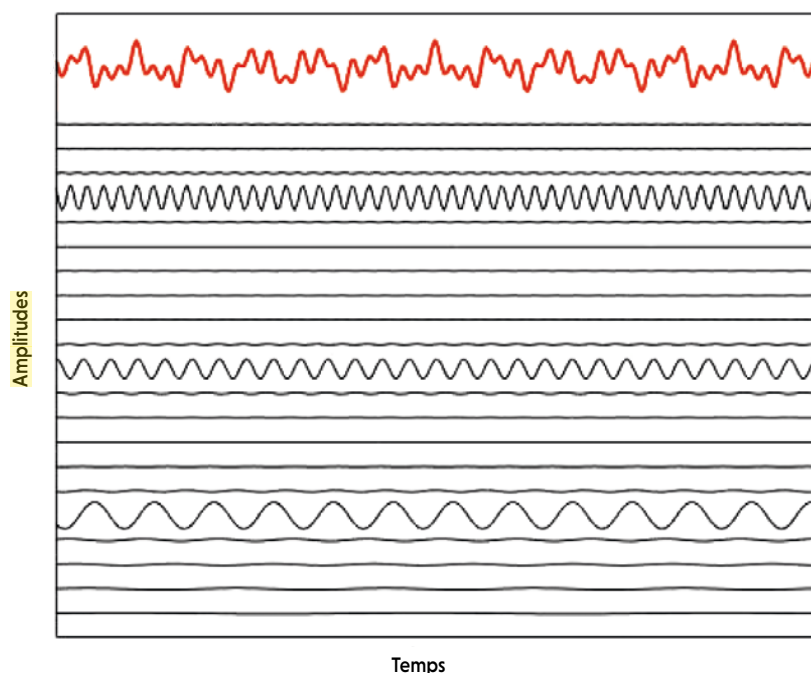
Dans cette représentation de f par une «série de Fourier», chaque coefficient s'obtient par une simple formule intégrale :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

Le tracé en rouge représente une fonction périodique. Sa décomposition de Fourier (tracés noirs) montre qu'elle est principalement constituée de la somme de trois oscillations sinusoïdales. Les autres oscillations sinusoïdales qui composent le signal sont de faible amplitude et négligeables : on peut donc représenter avec une très bonne précision la fonction périodique en question à l'aide de seulement trois coefficients de Fourier (et des trois fréquences des oscillations correspondantes).

Cette formule explicite le n -ième coefficient de la fonction $f(x)$ sur la base constituée par les fonctions élémentaires $\sin(nx)$. On l'interprétera plus tard comme le calcul d'un «produit scalaire» entre la fonction $f(x)$ et l'élément $\sin(nx)$ de la base de Fourier. En effet, dans ce contexte, un produit scalaire entre deux fonctions f et g définies sur $[0, \pi]$ peut être défini par la formule :

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) g(x) dx$$



Et l'on montre aisément que la base formée par les fonctions $\sin(nx)$ est orthonormée, c'est-à-dire que le produit scalaire de $\sin(mx)$ et de $\sin(nx)$ est égal à 0 si $m \neq n$, et égal à 1 si $m = n$. Autrement dit, la représentation de f par une série de Fourier revient à exprimer un vecteur f à l'aide d'une base orthonormée constituée des vecteurs $\sin(nx)$, qui sont de norme unité et orthogonaux entre eux.

Ces considérations et formules s'étendent sans difficulté (moyennant des modifications des divers facteurs numériques qui interviennent dans les expressions) à des fonctions définies sur un autre intervalle que $[0, \pi]$, ainsi qu'à des fonctions de plusieurs variables. Fourier a d'ailleurs utilisé ces outils pour représenter le champ de température $T(x, y, z)$ dans un solide.

La représentation de Fourier se généralise aussi à des fonctions définies sur tout l'ensemble des nombres réels. Dans ce cas, elle prend la forme d'une intégrale, et non d'une somme discrète, et on la dénomme transformée de Fourier.

UNE THÉORIE RENDUE RIGOUREUSE TARDIVEMENT

Fourier affirmait sans preuves valables que la représentation par des sinusôides et les formules correspondantes s'appliquaient à des fonctions quelconques. Il faut dire qu'au début du XIX^e siècle, de nombreux concepts de l'analyse mathématique, tels que la notion de fonction ou celle de limite, n'avaient pas de définitions suffisamment précises pour que l'on puisse fournir des démonstrations rigoureuses.

Une bonne partie des développements de l'analyse jusque dans les années 1960 auront pour objectif de préciser dans quelles conditions et dans quel sens la série de Fourier d'une fonction f , calculée à partir des formules de Fourier, peut représenter cette fonction f . En effet, la somme d'une infinité de nombres n'a de sens que si elle converge, c'est-à-dire si la somme des n premiers termes tend vers une limite finie quand n tend vers l'infini. Or le théorème de Carleson, qui prouve rigoureusement que la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ de carré intégrable (c'est-à-dire une fonction f dont l'intégrale de f^2 existe et donne un résultat fini) converge pour presque tout x vers $f(x)$, ne date que de 1966.

Pourquoi la représentation d'une fonction par une série de Fourier est-elle si utile ? Tout d'abord, elle montre qu'on peut reconstruire une fonction quelconque (mais suffisamment régulière) définie sur un intervalle borné à partir d'un objet beaucoup plus simple, à savoir la suite discrète de ses coefficients de Fourier.

Ensuite, on démontre que ces coefficients a_k tendent rapidement vers zéro quand k tend vers l'infini.