

La méthode de Fourier s'applique aussi aux fonctions de plusieurs variables

quelconque (mais suffisamment régulière) $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, \pi]$, elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \dots + a_n \sin(nx) + \dots$$

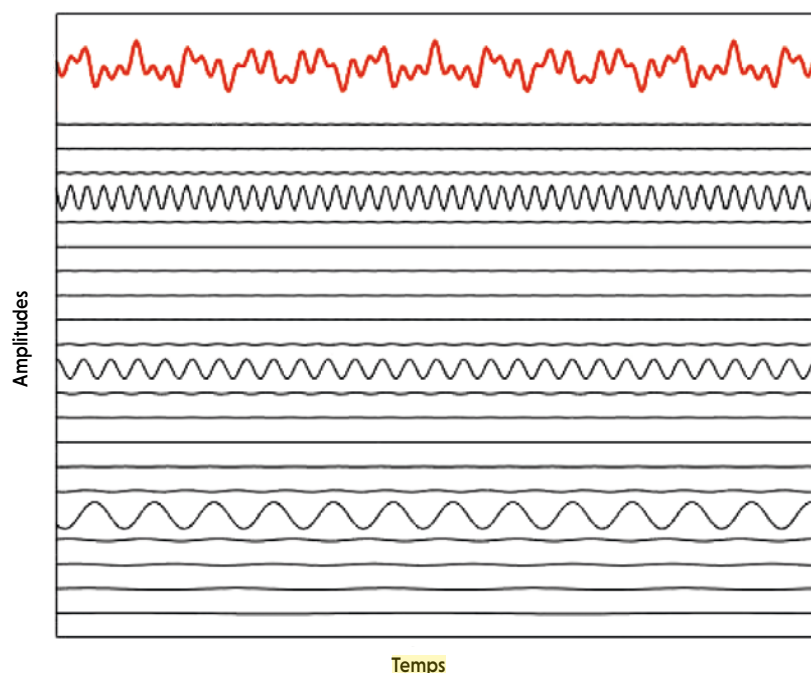
Dans cette représentation de f par une «série de Fourier», chaque coefficient s'obtient par une simple formule intégrale :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

Cette formule explicite le n -ième coefficient de la fonction $f(x)$ sur la base constituée par les fonctions élémentaires $\sin(nx)$. On l'interprétera plus tard comme le calcul d'un «produit scalaire» entre la fonction $f(x)$ et l'élément $\sin(nx)$ de la base de Fourier. En effet, dans ce contexte, un produit scalaire entre deux fonctions f et g définies sur $[0, \pi]$ peut être défini par la formule :

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) g(x) dx$$

Le tracé en rouge représente une fonction périodique. Sa décomposition de Fourier (tracés noirs) montre qu'elle est principalement constituée de la somme de trois oscillations sinusoïdales. Les autres oscillations sinusoïdales qui composent le signal sont de faible amplitude et négligeables : on peut donc représenter avec une très bonne précision la fonction périodique en question à l'aide de seulement trois coefficients de Fourier (et des trois fréquences des oscillations correspondantes).



Et l'on montre aisément que la base formée par les fonctions $\sin(nx)$ est orthonormée, c'est-à-dire que le produit scalaire de $\sin(mx)$ et de $\sin(nx)$ est égal à 0 si $m \neq n$, et égal à 1 si $m = n$. Autrement dit, la représentation de f par une série de Fourier revient à exprimer un vecteur f à l'aide d'une base orthonormée constituée des vecteurs $\sin(nx)$, qui sont de norme unité et orthogonaux entre eux.

Ces considérations et formules s'étendent sans difficulté (moyennant des modifications des divers facteurs numériques qui interviennent dans les expressions) à des fonctions définies sur un autre intervalle que $[0, \pi]$, ainsi qu'à des fonctions de plusieurs variables. Fourier a d'ailleurs utilisé ces outils pour représenter le champ de température $T(x, y, z)$ dans un solide.

La représentation de Fourier se généralise aussi à des fonctions définies sur tout l'ensemble des nombres réels. Dans ce cas, elle prend la forme d'une intégrale, et non d'une somme discrète, et on la dénomme transformée de Fourier.

UNE THÉORIE RENDUE RIGOREUSE TARDIVEMENT

Fourier affirmait sans preuves valables que la représentation par des sinusoides et les formules correspondantes s'appliquaient à des fonctions quelconques. Il faut dire qu'au début du XIX^e siècle, de nombreux concepts de l'analyse mathématique, tels que la notion de fonction ou celle de limite, n'avaient pas de définitions suffisamment précises pour que l'on puisse fournir des démonstrations rigoureuses.

Une bonne partie des développements de l'analyse jusque dans les années 1960 auront pour objectif de préciser dans quelles conditions et dans quel sens la série de Fourier d'une fonction f , calculée à partir des formules de Fourier, peut représenter cette fonction f . En effet, la somme d'une infinité de nombres n'a de sens que si elle converge, c'est-à-dire si la somme des n premiers termes tend vers une limite finie quand n tend vers l'infini. Or le théorème de Carleson, qui prouve rigoureusement que la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ de carré intégrable (c'est-à-dire une fonction f dont l'intégrale de f^2 existe et donne un résultat fini) converge pour presque tout x vers $f(x)$, ne date que de 1966.

Pourquoi la représentation d'une fonction par une série de Fourier est-elle si utile ? Tout d'abord, elle montre qu'on peut reconstruire une fonction quelconque (mais suffisamment régulière) définie sur un intervalle borné à partir d'un objet beaucoup plus simple, à savoir la suite discrète de ses coefficients de Fourier.

Ensuite, on démontre que ces coefficients a_k tendent rapidement vers zéro quand k tend vers l'infini.

► k tend vers l'infini; il s'ensuit qu'on peut ne garder qu'un nombre fini, disons les n premiers coefficients, pour reconstruire la fonction avec peu d'erreur. En effet, le reste de la série de Fourier, c'est-à-dire la somme de tous les termes négligés $a_k \sin(kx)$, d'indices supérieurs à n , tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Autrement dit, on peut représenter avec une bonne approximation toute fonction par un nombre fini de coefficients de Fourier. En termes modernes, cela signifie que l'on peut « numériser » efficacement la fonction, qui est alors représentée par un ensemble fini de nombres.

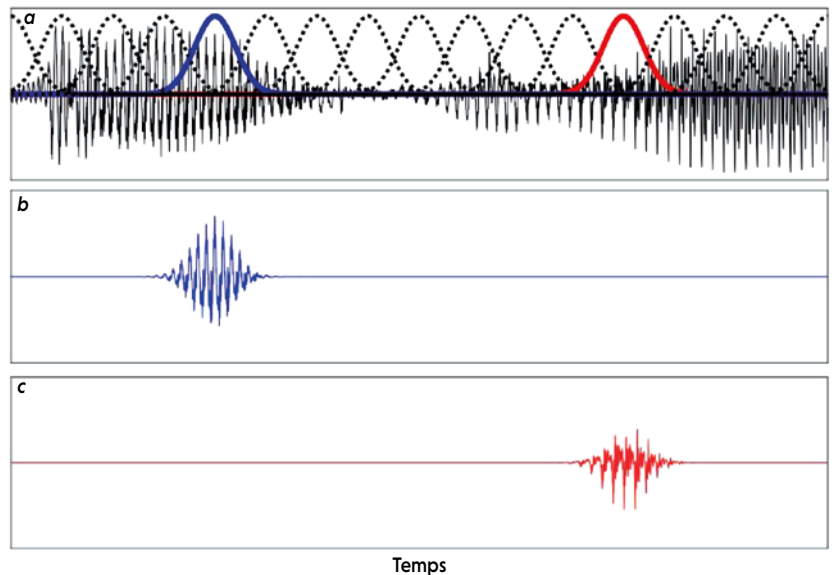
Ainsi, on peut représenter avec une bonne approximation un signal temporel $f(t)$ sur une durée finie par la somme d'un nombre fini de signaux sinusoïdaux de la forme $a_k \sin(\alpha k t)$ où k est un entier positif et α une constante qui dépend de la durée sur laquelle le signal est défini. Cela correspond à une décomposition du signal en ses principales fréquences (la fonction $\sin(\alpha k t)$ a une fréquence $\alpha k / (2\pi)$) (voir la figure page 57). L'ensemble des fréquences représentées dans la série de Fourier de la fonction $f(t)$ définit ce qu'on appelle le spectre de f , par analogie avec le spectre de la lumière blanche, qu'un prisme décompose en composantes colorées, de fréquence bien déterminée (voir la figure page 55).

RÉSOLUDRE DES ÉQUATIONS, RETOUCHER DES IMAGES...

Comme nous l'avons vu sur un exemple, la représentation en sommes de sinus (ou de cosinus, ou, de façon plus générale, d'exponentielles complexes, de la forme $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$ où i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$) permet de résoudre, dans toutes sortes de cas que Fourier a détaillés dans son traité, non seulement l'équation de la chaleur, mais aussi les principales équations linéaires de la physique.

La méthode de Fourier, souvent très efficace, trouve régulièrement de nouvelles applications. Par exemple, en 2003, Patrick Pérez, Michel Gangnet et Andrew Blake, alors chercheurs chez Microsoft au Royaume-Uni, ont proposé une méthode, nommée édition de Poisson, pour pratiquer le copier-coller d'une image dans une autre. Elle est aujourd'hui mise en œuvre dans tous les logiciels de retouche d'images.

Les trois chercheurs portaient de l'observation que l'on ne peut pas juste copier-coller brutalement un morceau d'une image I_1 dans une autre image I_2 : en effet, le bord de la zone copiée se détecterait immédiatement, car les couleurs de l'image cible I_2 et du morceau collé extrait de I_1 sont généralement différentes. Pour faire une retouche « sans couture », l'idée est de fusionner non pas les deux images, mais



Dans les analyses de Fourier locales, le signal est découpé en courts segments sur lesquels les caractéristiques spectrales sont considérées comme homogènes. Pour ce faire, on utilise une fenêtre « douce » qui glisse sur le signal et prélève sur celui-ci des segments pondérés et partiellement recouvrants. Ainsi, pour effectuer une analyse du signal représenté en a , on peut envisager un ensemble de fenêtres locales telles celles représentées en pointillés, dont chacune permet d'isoler une partie du signal (b et c). L'analyse de Fourier est ensuite appliquée à chacun des fragments de signal ainsi isolés.

leurs gradients, en créant un champ de vecteurs V qui est égal au gradient de la première image I_1 sur la zone à coller et au gradient de l'image cible I_2 ailleurs. Rappelons que le gradient d'une fonction $f(x, y)$, qui décrit l'image, est le champ de vecteurs du plan dont les composantes sont la dérivée $\partial f / \partial x$ de f selon la coordonnée x et la dérivée $\partial f / \partial y$ selon la coordonnée y . Or on montre que reconstruire une image f dont le gradient soit aussi proche que possible du champ V revient à résoudre une équation de Poisson, ce que des algorithmes fondés sur la méthode de Fourier effectuent très rapidement.

En fait, dès le XIX^e siècle, la résolution de nombreux problèmes, notamment les prévisions astronomiques, s'est effectuée par la méthode de Fourier, en calculant des coefficients d'une série de Fourier. Ce faisant, des méthodes rapides pour effectuer ces calculs seront redécouvertes plusieurs fois. Elles anticipaient l'invention en 1965 par les Américains James Cooley et John Tukey de la transformation de Fourier rapide ou FFT, pour « Fast Fourier Transform » (voir l'encadré page 56).

À la fin des années 1940, l'apparition des premiers ordinateurs a fait naître une nouvelle discipline, le traitement du signal, qui utilise la numérisation des sons et des images pour leur faire subir des transformations visant à en améliorer la qualité (par exemple en enlevant des bruits parasites) ou à les transmettre efficacement. Les méthodes de l'analyse de Fourier y ont très vite rencontré un immense succès, dû au fait que la plupart des signaux et images sont