

> k tend vers l'infini; il s'ensuit qu'on peut ne garder qu'un nombre fini, disons les n premiers coefficients, pour reconstruire la fonction avec peu d'erreur. En effet, le reste de la série de Fourier, c'est-à-dire la somme de tous les termes négligés $a_k \sin(kx)$, d'indices supérieurs à n , tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Autrement dit, on peut représenter avec une bonne approximation toute fonction par un nombre fini de coefficients de Fourier. En termes modernes, cela signifie que l'on peut « numériser » efficacement la fonction, qui est alors représentée par un ensemble fini de nombres.

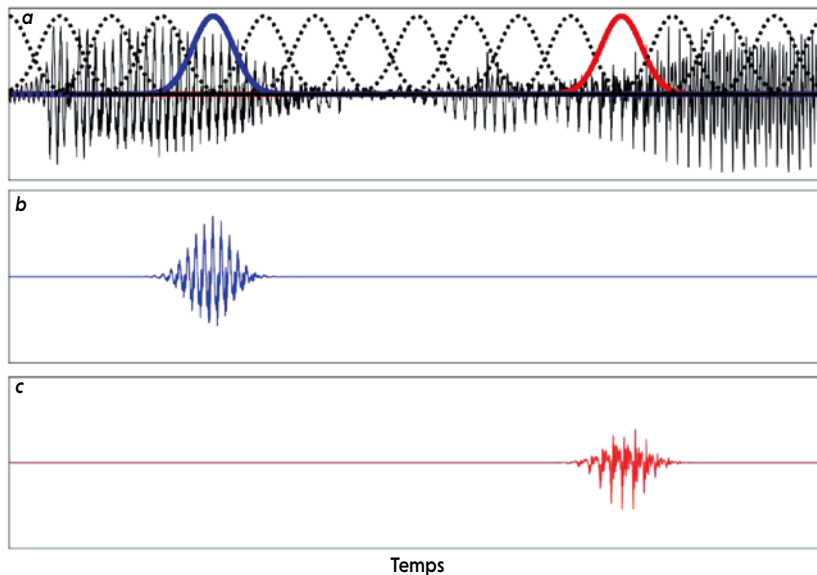
Ainsi, on peut représenter avec une bonne approximation un signal temporel $f(t)$ sur une durée finie par la somme d'un nombre fini de signaux sinusoïdaux de la forme $a_k \sin(\alpha k t)$ où k est un entier positif et α une constante qui dépend de la durée sur laquelle le signal est défini. Cela correspond à une décomposition du signal en ses principales fréquences (la fonction $\sin(\alpha k t)$ a une fréquence $\alpha k / (2\pi)$) (voir la figure page 57). L'ensemble des fréquences représentées dans la série de Fourier de la fonction $f(t)$ définit ce qu'on appelle le spectre de f , par analogie avec le spectre de la lumière blanche, qu'un prisme décompose en composantes colorées, de fréquence bien déterminée (voir la figure page 55).

RÉSOLVER DES ÉQUATIONS, RETOUCHER DES IMAGES...

Comme nous l'avons vu sur un exemple, la représentation en sommes de sinus (ou de cosinus, ou, de façon plus générale, d'exponentielles complexes, de la forme $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$ où i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$) permet de résoudre, dans toutes sortes de cas que Fourier a détaillés dans son traité, non seulement l'équation de la chaleur, mais aussi les principales équations linéaires de la physique.

La méthode de Fourier, souvent très efficace, trouve régulièrement de nouvelles applications. Par exemple, en 2003, Patrick Pérez, Michel Gangnet et Andrew Blake, alors chercheurs chez Microsoft au Royaume-Uni, ont proposé une méthode, nommée édition de Poisson, pour pratiquer le copier-coller d'une image dans une autre. Elle est aujourd'hui mise en œuvre dans tous les logiciels de retouche d'images.

Les trois chercheurs portaient de l'observation que l'on ne peut pas juste copier-coller brutalement un morceau d'une image I_1 dans une autre image I_2 : en effet, le bord de la zone copiée se détecterait immédiatement, car les couleurs de l'image cible I_2 et du morceau collé extrait de I_1 sont généralement différentes. Pour faire une retouche « sans couture », l'idée est de fusionner non pas les deux images, mais



Dans les analyses de Fourier locales, le signal est découpé en courts segments sur lesquels les caractéristiques spectrales sont considérées comme homogènes. Pour ce faire, on utilise une fenêtre « douce » qui glisse sur le signal et prélève sur celui-ci des segments pondérés et partiellement recouvrants. Ainsi, pour effectuer une analyse du signal représenté en a , on peut envisager un ensemble de fenêtres locales telles celles représentées en pointillés, dont chacune permet d'isoler une partie du signal (b et c). L'analyse de Fourier est ensuite appliquée à chacun des fragments de signal ainsi isolés.

leurs gradients, en créant un champ de vecteurs V qui est égal au gradient de la première image I_1 sur la zone à coller et au gradient de l'image cible I_2 ailleurs. Rappelons que le gradient d'une fonction $f(x, y)$, qui décrit l'image, est le champ de vecteurs du plan dont les composantes sont la dérivée $\partial f / \partial x$ de f selon la coordonnée x et la dérivée $\partial f / \partial y$ selon la coordonnée y . Or on montre que reconstruire une image f dont le gradient soit aussi proche que possible du champ V revient à résoudre une équation de Poisson, ce que des algorithmes fondés sur la méthode de Fourier effectuent très rapidement.

En fait, dès le XIX^e siècle, la résolution de nombreux problèmes, notamment les prévisions astronomiques, s'est effectuée par la méthode de Fourier, en calculant des coefficients d'une série de Fourier. Ce faisant, des méthodes rapides pour effectuer ces calculs seront redécouvertes plusieurs fois. Elles anticipaient l'invention en 1965 par les Américains James Cooley et John Tukey de la transformation de Fourier rapide ou FFT, pour « Fast Fourier Transform » (voir l'encadré page 56).

À la fin des années 1940, l'apparition des premiers ordinateurs a fait naître une nouvelle discipline, le traitement du signal, qui utilise la numérisation des sons et des images pour leur faire subir des transformations visant à en améliorer la qualité (par exemple en enlevant des bruits parasites) ou à les transmettre efficacement. Les méthodes de l'analyse de Fourier y ont très vite rencontré un immense succès, dû au fait que la plupart des signaux et images sont

représentés de façon économique par une série de Fourier. En effet, la transmission d'un petit nombre de coefficients suffit pour reconstituer le signal avec une grande précision; de plus, les bruits parasites correspondent souvent, dans la série de Fourier, à des termes dont les coefficients ont une faible valeur, et il est donc plus facile de les éliminer en utilisant la représentation de Fourier.

Cependant, si l'on s'en tient à sa formulation initiale, la représentation de Fourier souffre de limitations dans bon nombre de situations. Une représentation en termes de fonctions sinusoïdales est *a priori* bien adaptée pour décrire un signal présentant des oscillations permanentes. Mais dans des cas moins « stationnaires » (signaux transitoires, modulations de fréquence, etc.), la description qu'elle offre peut s'écarter sensiblement du signal réel.

Si l'on s'en réfère à une analogie musicale, on peut voir un mode de Fourier (c'est-à-dire

une oscillation sinusoïdale) comme une note de musique dont la hauteur correspond à la fréquence de ce mode. Ce point de vue se heurte cependant au fait qu'un tel mode est par définition éternel alors que, dans tout morceau de musique, les notes que l'on entend sont localisées dans le temps.

DÉCOUPER LE SIGNAL EN COURTS SEGMENTS TEMPORELS

Dépasser cette limitation a fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 1940. On a ainsi cherché à mettre au point une analyse de Fourier « locale » qui réaliserait mathématiquement ce qu'on lit sur une portée musicale. En d'autres termes, il s'agissait d'obtenir une « représentation temps-fréquence », permettant de lire, pour chaque intervalle de temps donné, les fréquences représentatives du signal.

La solution la plus simple consiste à découper le signal en courts segments temporels successifs et à appliquer une analyse de Fourier classique sur chacun d'eux (voir l'encadré ci-contre). Cependant, une découpe simple, mais brutale, du signal en segments adjacents crée parfois des artefacts. Afin de les limiter, une meilleure analyse de Fourier locale fait usage de fenêtres qui sont à la fois pondérées et partiellement recouvrantes (voir la figure page précédente).

On obtient ainsi une représentation régulière et d'interprétation visuelle aisée. Mais elle n'est pas totalement satisfaisante sur le plan de l'efficacité algorithmique, car elle est redondante: les spectres calculés sur chaque fenêtre ne sont pas indépendants. Le codage de l'information n'est donc pas optimal et l'inversion de la transformation, qui permet de reconstituer le signal à partir de sa représentation de Fourier, est rendue plus difficile.

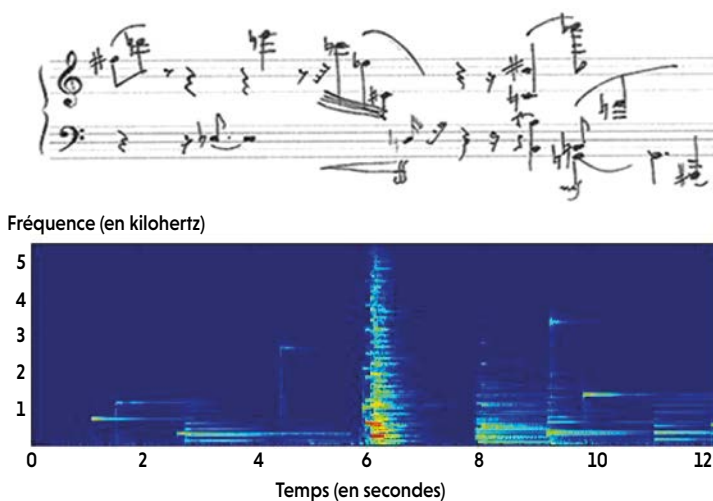
Plusieurs pistes ont été suivies pour pallier ces difficultés et trouver de véritables bases temps-fréquence orthonormées (des familles de fonctions indépendantes permettant une description du signal sans perte d'information ni redondance) pouvant être associées à des algorithmes rapides d'analyse et de synthèse.

L'existence de telles bases a longtemps été tenue pour impossible, car elle semblait contredire certains résultats théoriques en physique mathématique. Ce n'est qu'au début des années 1990 qu'ont été développées des méthodes satisfaisantes telles que la MDCT (pour *Modified Discrete Cosine Transform*), aujourd'hui largement utilisée pour les formats de compression audio numérique (MP3, MPEG2-AAC).

Les « bases de Wilson » en sont une variante. Inspirées d'une idée du physicien américain Kenneth Wilson (lauréat du prix Nobel en 1982), les bases de Wilson ont ➤

REPRÉSENTATION TEMPS-FRÉQUENCE

Dans sa version de base, l'analyse de Fourier représente un signal temporel $f(t)$ par un spectre fréquentiel qui ne dépend pas du temps : les modes de Fourier – les fonctions sinusoïdales comme $a_n \sin(nt)$ – sont supposés établis de façon permanente, avec des poids a_n constants. Afin de rendre l'analyse évolutive et plus fine, on peut segmenter le signal en courts intervalles de temps successifs et appliquer l'analyse de Fourier sur chacun de ces intervalles. On parle alors de « transformée de Fourier à court terme » et la représentation dite temps-fréquence qui en résulte est l'analogue de l'écriture d'un morceau musical sur une portée (voir la figure) : pour chaque intervalle de temps, on obtient un ensemble de fréquences (les notes en musique) représentatives du signal.



Un peu comme les portées d'une partition musicale (en haut), une analyse de Fourier à court terme du morceau de musique représente celui-ci sur un diagramme temps-fréquence (en bas). L'intensité étant codée par la couleur (du bleu foncé pour les faibles valeurs au rouge pour les plus grandes), cette représentation permet d'identifier les notes par leur hauteur, l'instant de leur occurrence et leur poids énergétique.