

représentés de façon économique par une série de Fourier. En effet, la transmission d'un petit nombre de coefficients suffit pour reconstituer le signal avec une grande précision; de plus, les bruits parasites correspondent souvent, dans la série de Fourier, à des termes dont les coefficients ont une faible valeur, et il est donc plus facile de les éliminer en utilisant la représentation de Fourier.

Cependant, si l'on s'en tient à sa formulation initiale, la représentation de Fourier souffre de limitations dans bon nombre de situations. Une représentation en termes de fonctions sinusoïdales est *a priori* bien adaptée pour décrire un signal présentant des oscillations permanentes. Mais dans des cas moins « stationnaires » (signaux transitoires, modulations de fréquence, etc.), la description qu'elle offre peut s'écarter sensiblement du signal réel.

Si l'on s'en réfère à une analogie musicale, on peut voir un mode de Fourier (c'est-à-dire

une oscillation sinusoïdale) comme une note de musique dont la hauteur correspond à la fréquence de ce mode. Ce point de vue se heurte cependant au fait qu'un tel mode est par définition éternel alors que, dans tout morceau de musique, les notes que l'on entend sont localisées dans le temps.

DÉCOUPER LE SIGNAL EN COURTS SEGMENTS TEMPORELS

Dépasser cette limitation a fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 1940. On a ainsi cherché à mettre au point une analyse de Fourier « locale » qui réaliserait mathématiquement ce qu'on lit sur une portée musicale. En d'autres termes, il s'agissait d'obtenir une « représentation temps-fréquence », permettant de lire, pour chaque intervalle de temps donné, les fréquences représentatives du signal.

La solution la plus simple consiste à découper le signal en courts segments temporels successifs et à appliquer une analyse de Fourier classique sur chacun d'eux (voir l'encadré ci-contre). Cependant, une découpe simple, mais brutale, du signal en segments adjacents crée parfois des artefacts. Afin de les limiter, une meilleure analyse de Fourier locale fait usage de fenêtres qui sont à la fois pondérées et partiellement recouvrantes (voir la figure page précédente).

On obtient ainsi une représentation régulière et d'interprétation visuelle aisée. Mais elle n'est pas totalement satisfaisante sur le plan de l'efficacité algorithmique, car elle est redondante: les spectres calculés sur chaque fenêtre ne sont pas indépendants. Le codage de l'information n'est donc pas optimal et l'inversion de la transformation, qui permet de reconstituer le signal à partir de sa représentation de Fourier, est rendue plus difficile.

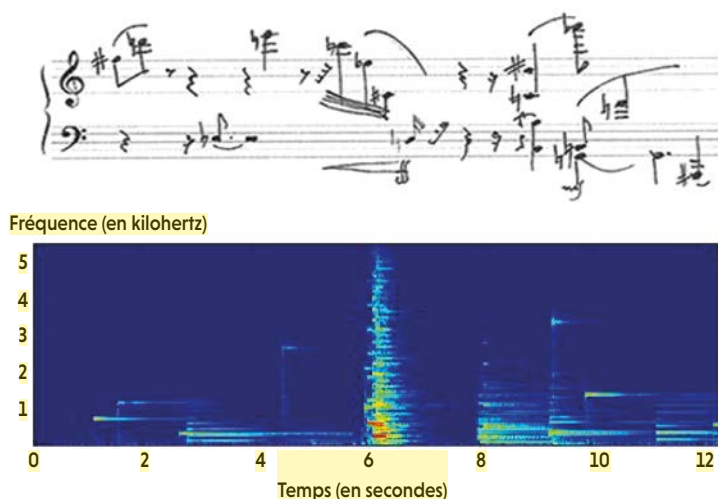
Plusieurs pistes ont été suivies pour pallier ces difficultés et trouver de véritables bases temps-fréquence orthonormées (des familles de fonctions indépendantes permettant une description du signal sans perte d'information ni redondance) pouvant être associées à des algorithmes rapides d'analyse et de synthèse.

L'existence de telles bases a longtemps été tenue pour impossible, car elle semblait contredire certains résultats théoriques en physique mathématique. Ce n'est qu'au début des années 1990 qu'ont été développées des méthodes satisfaisantes telles que la MDCT (pour *Modified Discrete Cosine Transform*), aujourd'hui largement utilisée pour les formats de compression audio numérique (MP3, MPEG2-AAC).

Les « bases de Wilson » en sont une variante. Inspirées d'une idée du physicien américain Kenneth Wilson (lauréat du prix Nobel en 1982), les bases de Wilson ont ➤

REPRÉSENTATION TEMPS-FRÉQUENCE

Dans sa version de base, l'analyse de Fourier représente un signal temporel $f(t)$ par un spectre fréquentiel qui ne dépend pas du temps : les modes de Fourier – les fonctions sinusoïdales comme $a_n \sin(nt)$ – sont supposés établis de façon permanente, avec des poids a_n constants. Afin de rendre l'analyse évolutive et plus fine, on peut segmenter le signal en courts intervalles de temps successifs et appliquer l'analyse de Fourier sur chacun de ces intervalles. On parle alors de « transformée de Fourier à court terme » et la représentation dite temps-fréquence qui en résulte est l'analogue de l'écriture d'un morceau musical sur une portée (voir la figure) : pour chaque intervalle de temps, on obtient un ensemble de fréquences (les notes en musique) représentatives du signal.



Un peu comme les portées d'une partition musicale (en haut), une analyse de Fourier à court terme du morceau de musique représente celui-ci sur un diagramme temps-fréquence (en bas). L'intensité étant codée par la couleur (du bleu foncé pour les faibles valeurs au rouge pour les plus grandes), cette représentation permet d'identifier les notes par leur hauteur, l'instant de leur occurrence et leur poids énergétique.