

représentés de façon économique par une série de Fourier. En effet, la transmission d'un petit nombre de coefficients suffit pour reconstituer le signal avec une grande précision; de plus, les bruits parasites correspondent souvent, dans la série de Fourier, à des termes dont les coefficients ont une faible valeur, et il est donc plus facile de les éliminer en utilisant la représentation de Fourier.

Cependant, si l'on s'en tient à sa formulation initiale, la représentation de Fourier souffre de limitations dans bon nombre de situations. Une représentation en termes de fonctions sinusoïdales est *a priori* bien adaptée pour décrire un signal présentant des oscillations permanentes. Mais dans des cas moins « stationnaires » (signaux transitoires, modulations de fréquence, etc.), la description qu'elle offre peut s'écarter sensiblement du signal réel.

Si l'on s'en réfère à une analogie musicale, on peut voir un mode de Fourier (c'est-à-dire

une oscillation sinusoïdale) comme une note de musique dont la hauteur correspond à la fréquence de ce mode. Ce point de vue se heurte cependant au fait qu'un tel mode est par définition éternel alors que, dans tout morceau de musique, les notes que l'on entend sont localisées dans le temps.

DÉCOUPER LE SIGNAL EN COURTS SEGMENTS TEMPORELS

Dépasser cette limitation a fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 1940. On a ainsi cherché à mettre au point une analyse de Fourier « locale » qui réaliserait mathématiquement ce qu'on lit sur une portée musicale. En d'autres termes, il s'agissait d'obtenir une « représentation temps-fréquence », permettant de lire, pour chaque intervalle de temps donné, les fréquences représentatives du signal.

La solution la plus simple consiste à découper le signal en courts segments temporels successifs et à appliquer une analyse de Fourier classique sur chacun d'eux (voir l'encadré ci-contre). Cependant, une découpe simple, mais brutale, du signal en segments adjacents crée parfois des artefacts. Afin de les limiter, une meilleure analyse de Fourier locale fait usage de fenêtres qui sont à la fois pondérées et partiellement recouvrantes (voir la figure page précédente).

On obtient ainsi une représentation régulière et d'interprétation visuelle aisée. Mais elle n'est pas totalement satisfaisante sur le plan de l'efficacité algorithmique, car elle est redondante: les spectres calculés sur chaque fenêtre ne sont pas indépendants. Le codage de l'information n'est donc pas optimal et l'inversion de la transformation, qui permet de reconstituer le signal à partir de sa représentation de Fourier, est rendue plus difficile.

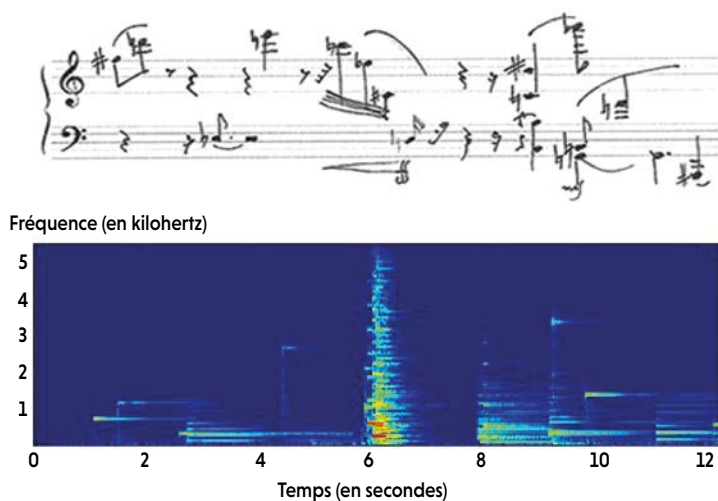
Plusieurs pistes ont été suivies pour pallier ces difficultés et trouver de véritables bases temps-fréquence orthonormées (des familles de fonctions indépendantes permettant une description du signal sans perte d'information ni redondance) pouvant être associées à des algorithmes rapides d'analyse et de synthèse.

L'existence de telles bases a longtemps été tenue pour impossible, car elle semblait contredire certains résultats théoriques en physique mathématique. Ce n'est qu'au début des années 1990 qu'ont été développées des méthodes satisfaisantes telles que la MDCT (pour *Modified Discrete Cosine Transform*), aujourd'hui largement utilisée pour les formats de compression audio numérique (MP3, MPEG2-AAC).

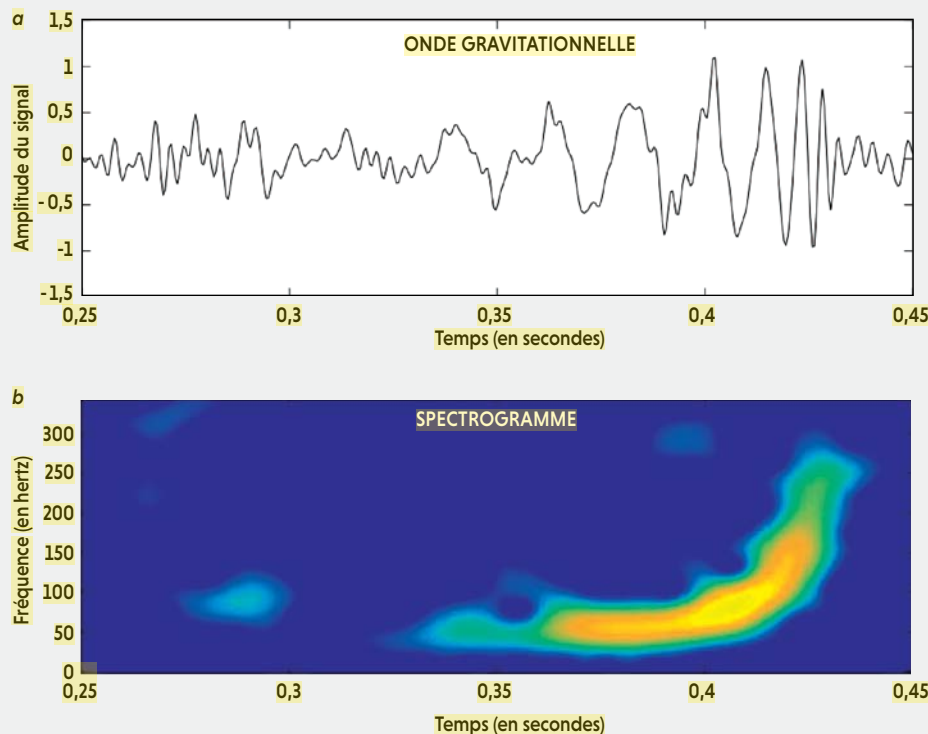
Les « bases de Wilson » en sont une variante. Inspirées d'une idée du physicien américain Kenneth Wilson (lauréat du prix Nobel en 1982), les bases de Wilson ont >

REPRÉSENTATION TEMPS-FRÉQUENCE

Dans sa version de base, l'analyse de Fourier représente un signal temporel $f(t)$ par un spectre fréquentiel qui ne dépend pas du temps : les modes de Fourier – les fonctions sinusoïdales comme $a_n \sin(nt)$ – sont supposés établis de façon permanente, avec des poids a_n constants. Afin de rendre l'analyse évolutive et plus fine, on peut segmenter le signal en courts intervalles de temps successifs et appliquer l'analyse de Fourier sur chacun de ces intervalles. On parle alors de « transformée de Fourier à court terme » et la représentation dite temps-fréquence qui en résulte est l'analogue de l'écriture d'un morceau musical sur une portée (voir la figure) : pour chaque intervalle de temps, on obtient un ensemble de fréquences (les notes en musique) représentatives du signal.



Un peu comme les portées d'une partition musicale (*en haut*), une analyse de Fourier à court terme du morceau de musique représente celui-ci sur un diagramme temps-fréquence (*en bas*). L'intensité étant codée par la couleur (du bleu foncé pour les faibles valeurs au rouge pour les plus grandes), cette représentation permet d'identifier les notes par leur hauteur, l'instant de leur occurrence et leur poids énergétique.



La première détection directe d'une onde gravitationnelle a été réalisée en 2015 par le dispositif interférométrique *Ligo*, aux États-Unis. Elle a nécessité une analyse efficace du signal. Cette analyse est effectuée par une décomposition de Fourier locale avec des fenêtres « douces » (voir la figure page 58), le signal de chaque fenêtre étant décomposé sur une base de Wilson (une famille particulière de fonctions). Le signal brut (a) qu'a recueilli l'interféromètre est constitué d'une bouffée bruitée d'oscillations dont la fréquence s'accélère au fil du temps. Sa représentation temps-fréquence (b) montre que l'énergie du signal (codée par la couleur) se concentre sur une trajectoire relativement bien définie dans le plan temps-fréquence. En ne retenant dans cette représentation que les composantes dominantes, il est possible de débruiter le signal (c, courbe rouge), qui correspond alors remarquablement bien au calcul théorique d'un signal gravitationnel dû à la coalescence de deux trous noirs (c, courbe noire).

➤ récemment joué un rôle clé dans la première détection directe d'une onde gravitationnelle, en 2015 (voir la figure pages 60 et 61).

DÉTECTION D'ONDES GRAVITATIONNELLES

L'exemple de la détection des ondes gravitationnelles est emblématique de la capacité d'une description temps-fréquence à mettre en évidence, en présence de bruit, un signal transitoire de type *chirp*. Ce terme, qui signifie « pépiement » en anglais, désigne un signal transitoire de la forme $a(t) \sin b(t)$ où les variations de l'amplitude $a(t)$ sont lentes par rapport aux oscillations décrites par le terme $\sin b(t)$. Avec une représentation temps-fréquence par une base de fonctions orthonormées, le gros de l'énergie d'un tel signal transitoire correspond à quelques coefficients forts, tandis que d'éventuels bruits parasites se répartissent sur de petits coefficients, répartis sur l'ensemble du plan temps-fréquence.

La détection directe d'une onde gravitationnelle est effectuée par une interférométrie optique très sensible, mise en œuvre dans les immenses dispositifs de la collaboration *LIGO-Virgo*, dont les concepteurs ont reçu le prix Nobel de physique en 2017. En effet, avec un interféromètre suffisamment grand, le passage d'une onde gravitationnelle se traduit par une légère modification de la longueur d'un des deux bras du dispositif par rapport

à l'autre. Le système des franges d'interférence observées oscille donc. Dans le cas de la première détection, survenue le 14 septembre 2015, la source d'ondes gravitationnelles était l'effondrement d'un système de deux trous noirs en rotation l'un autour de l'autre. Cette rotation s'accélère lors de la phase ultime précédant la coalescence des deux astres, avec pour conséquence une augmentation de la fréquence de l'oscillation des franges d'interférence. Le signal mesuré a alors une structure de *chirp*.

La représentation temps-fréquence d'un tel *chirp* est dite parcimonieuse, au sens où elle n'est constituée que d'un petit nombre de coefficients significatifs, ses contributions principales s'organisant le long de la trajectoire d'évolution de la fréquence. La théorie prédit que cette fréquence se comporte en première approximation comme $t^{-3/8}$, où t est le temps. Cela facilite l'identification du signal et son débruitage, et le résultat se compare remarquablement bien avec la prédiction de la théorie de la relativité générale (voir la figure ci-dessus).

DES ONDELETTES POUR FENÊTRES VARIABLES

L'analyse temps-fréquence est cependant limitée par l'utilisation d'une fenêtre de largeur fixe. Elle n'est donc pas adaptée aux signaux ou images dépourvus d'échelle caractéristique, qui présentent des détails à toutes les échelles.