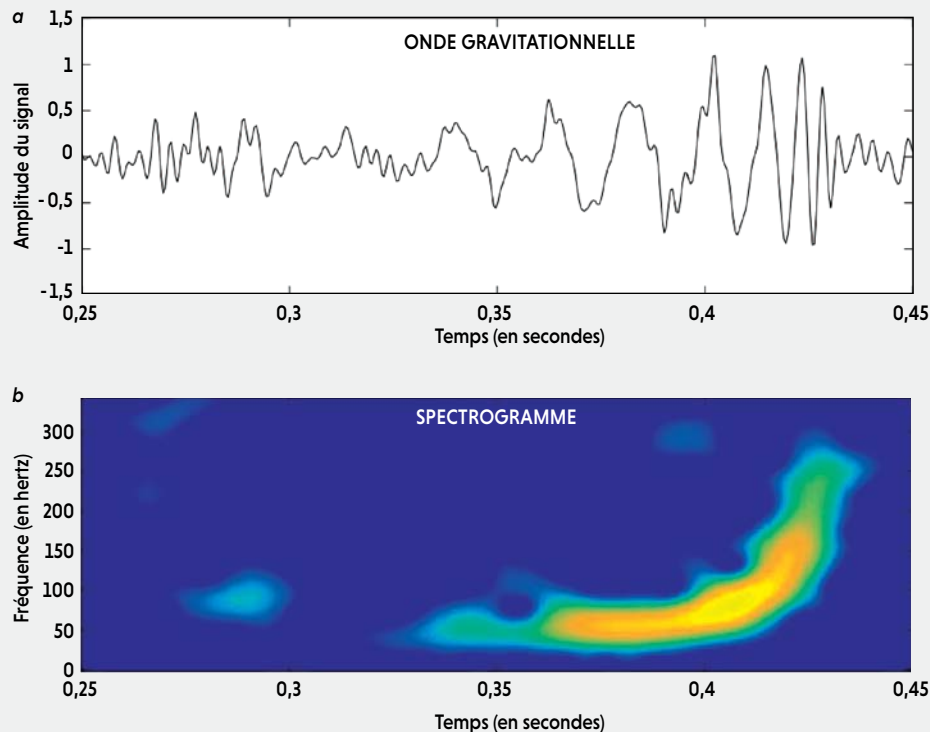




La première détection directe d'une onde gravitationnelle a été réalisée en 2015 par le dispositif interférométrique *Ligo*, aux États-Unis. Elle a nécessité une analyse efficace du signal. Cette analyse est effectuée par une décomposition de Fourier locale avec des fenêtres « douces » (voir la figure page 58), le signal de chaque fenêtre étant décomposé sur une base de Wilson (une famille particulière de fonctions). Le signal brut (a) qu'a recueilli l'interféromètre est constitué d'une bouffée bruitée d'oscillations dont la fréquence s'accélère au fil du temps. Sa représentation temps-fréquence (b) montre que l'énergie du signal (codée par la couleur) se concentre sur une trajectoire relativement bien définie dans le plan temps-fréquence. En ne retenant dans cette représentation que les composantes dominantes, il est possible de débruiter le signal (c, courbe rouge), qui correspond alors remarquablement bien au calcul théorique d'un signal gravitationnel dû à la coalescence de deux trous noirs (c, courbe noire).

➤ récemment joué un rôle clé dans la première détection directe d'une onde gravitationnelle, en 2015 (voir la figure pages 60 et 61).

## DÉTECTION D'ONDES GRAVITATIONNELLES

L'exemple de la détection des ondes gravitationnelles est emblématique de la capacité d'une description temps-fréquence à mettre en évidence, en présence de bruit, un signal transitoire de type *chirp*. Ce terme, qui signifie « pépiement » en anglais, désigne un signal transitoire de la forme  $a(t) \sin b(t)$  où les variations de l'amplitude  $a(t)$  sont lentes par rapport aux oscillations décrites par le terme  $\sin b(t)$ . Avec une représentation temps-fréquence par une base de fonctions orthonormées, le gros de l'énergie d'un tel signal transitoire correspond à quelques coefficients forts, tandis que d'éventuels bruits parasites se répartissent sur de petits coefficients.

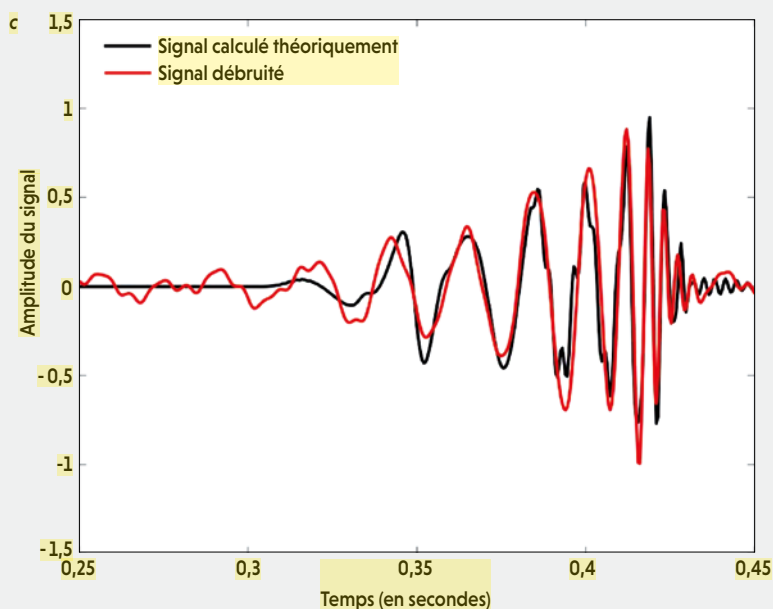
La détection directe d'une onde gravitationnelle est effectuée par une interférométrie optique très sensible, mise en œuvre dans les immenses dispositifs de la collaboration *LIGO-Virgo*, dont les concepteurs ont reçu le prix Nobel de physique en 2017. En effet, avec un interféromètre suffisamment grand, le passage d'une onde gravitationnelle se traduit par une légère modification de la longueur d'un des deux bras du dispositif par rapport

à l'autre. Le système des franges d'interférence observées oscille donc. Dans le cas de la première détection, survenue le 14 septembre 2015, la source d'ondes gravitationnelles était l'effondrement d'un système de deux trous noirs en rotation l'un autour de l'autre. Cette rotation s'accélère lors de la phase ultime précédant la coalescence des deux astres, avec pour conséquence une augmentation de la fréquence de l'oscillation des franges d'interférence. Le signal mesuré a alors une structure de *chirp*.

La représentation temps-fréquence d'un tel *chirp* est dite parcimonieuse, au sens où elle n'est constituée que d'un petit nombre de coefficients significatifs, ses contributions principales s'organisant le long de la trajectoire d'évolution de la fréquence. La théorie prédit que cette fréquence se comporte en première approximation comme  $t^{-3/8}$ , où  $t$  est le temps. Cela facilite l'identification du signal et son débruitage, et le résultat se compare remarquablement bien avec la prédiction de la théorie de la relativité générale (voir la figure ci-dessus).

## DES ONDELETTES POUR FENÊTRES VARIABLES

L'analyse temps-fréquence est cependant limitée par l'utilisation d'une fenêtre de largeur fixe. Elle n'est donc pas adaptée aux signaux ou images dépourvus d'échelle caractéristique, qui présentent des détails à toutes les échelles.



C'est typiquement le cas des images naturelles, en raison de l'effet de perspective.

Il en est de même pour certains signaux sismiques utilisés en prospection pétrolière. La technique de « sismique réflexion » consiste à produire une vibration à la surface du sol, qui se propage dans le sous-sol tout en étant réfléchi par les multiples couches qui le composent. Les géophysiciens cherchaient à déduire des informations sur la nature de ces couches, et notamment la présence éventuelle de pétrole, à partir d'une analyse du signal réfléchi. Or pour de tels signaux, l'analyse temps-fréquence se révélait inefficace : elle ne permettait pas d'analyser les détails du signal plus petits que la largeur de la fenêtre.

## Les ondelettes ont connu un succès très rapide en traitement du signal et des images

Dans les années 1980, le géophysicien français Jean Morlet a ainsi été conduit à abandonner l'analyse temps-fréquence pour introduire l'analyse par « ondelettes ». Il s'agit de décomposer le signal sous la forme d'une somme de versions translatées et dilatées d'une seule fonction oscillante et bien localisée, à choisir de façon appropriée.

En collaboration avec le physicien théoricien Alex Grossmann, Jean Morlet introduisit la première variante d'une décomposition en ondelettes. Il s'agissait d'une transformation qui décompose un signal  $f(t)$  en termes de toutes les translatées-dilatées d'une certaine ondelette  $\psi(t)$ , c'est-à-dire de toutes les fonctions de la forme  $\psi((t-b)/a)$ , où  $a$ , le paramètre de dilatation, prend toutes les valeurs positives et  $b$ , le paramètre de translation, prend toutes les valeurs réelles.

### DES BASES D'ONDELETTES SANS REDONDANCE

Cependant, ce système de représentation était très redondant et donc peu efficace. C'est ici qu'intervint Yves Meyer. En 1986, ce mathématicien français (lauréat du prix Gauss en 2010 et du prix Abel en 2017) montra que, pour certains choix de l'ondelette  $\psi$ , une famille de translatées-dilatées particulières conduit à une base de fonctions orthonormées, qui permettent donc de représenter le signal sans redondance.

Les progrès se sont alors enchaînés rapidement. Stéphane Mallat, aujourd'hui professeur au Collège de France, établit le lien avec des algorithmes de décomposition utilisés en analyse d'images, et introduisit les algorithmes de décomposition rapides, indispensables pour les applications techniques. En 1988, Ingrid Daubechies, physicienne et mathématicienne d'origine belge, construisit des ondelettes à support compact (c'est-à-dire des fonctions nulles en dehors d'un intervalle de taille finie), qui autorisent une meilleure efficacité algorithmique. Le standard de compression professionnel des photographies de haute définition utilisé aujourd'hui, JPEG 2000, est fondé sur des décompositions de ce type (voir la figure page 62).

Les décompositions en ondelettes ont connu un succès très rapide en traitement du signal et des images. En effet, pour de vastes classes de signaux, elles donnent lieu à des décompositions parcimonieuses, où ne figurent qu'un petit nombre de coefficients. De telles représentations rendent possible une très forte compression des données, sans réelle perte d'information. Cette propriété est importante non seulement pour transmettre rapidement et efficacement des données, mais aussi pour éliminer les bruits parasites : un algorithme performant consiste simplement à >



JPEG



JPEG2000



> annuler les plus petits coefficients dans la décomposition du signal en ondelettes. La théorie statistique qui justifie et développe cela a été mise au point par David Donoho (lauréat du prix Gauss en 2018), de l'université Stanford, et ses collègues.

De façon générale, les développements de l'analyse de Fourier sont au cœur de l'actualité scientifique et technique. Ils interviennent partout dans le traitement de données vocales ou musicales, où la séparation des sources et leur caractérisation s'appuient sur l'identification de motifs spectraux et de leurs occurrences au fil du temps.

En ingénierie biomédicale, la détection de signatures temps-fréquence caractéristiques dans des enregistrements de signaux ou d'images dans différentes modalités (électroencéphalographie, électrocardiographie, magnétoencéphalographie...) peut être associée à diverses pathologies.

## UNE APPROCHE QUI NE CESSE DE SE RENOUVELER

Plus fondamentalement, l'une des techniques d'apprentissage profond les plus récentes, la «transformée de scattering», développée par Stéphane Mallat et ses collègues, peut être interprétée comme une variante des

La norme JPEG de compression d'images, créée en 1992 par le collectif d'experts nommé Joint Photographic Experts Group, est d'un usage très répandu. Elle utilise une représentation des images à base de fonctions cosinus (DCT, pour *Discrete Cosine Transform*). En 2000, a été proposée la norme JPEG 2000, qui utilise une compression à base d'ondelettes. Comme le montrent ces images (décompressées), la compression JPEG 2000 offre une qualité bien meilleure que la norme JPEG initiale, pour une même taille de fichier.

techniques des réseaux de neurones profonds, où l'on calcule des itérées de la transformée en ondelettes. Elle et ses variantes ouvrent la voie à de nouveaux algorithmes de classification de sons ou d'images.

On peut noter enfin que la théorie récente de l'«acquisition comprimée», ou *compressed sensing* en anglais, introduite par Emmanuel Candès, Justin Romberg, Terence Tao et David Donoho, parvient à exploiter le fait qu'un signal ayant une représentation parcimonieuse dans une base bien choisie (ce qui est le cas avec les ondelettes pour la plupart des données naturelles) peut être acquis au moyen d'un très petit nombre d'échantillons. Cette théorie trouve actuellement des applications importantes en imagerie médicale: on a ainsi pu réduire de façon spectaculaire le temps nécessaire pour effectuer une IRM.

Ainsi, l'approche proposée par Fourier ne cesse de se renouveler sans rien perdre de ses principes fondateurs. Deux siècles plus tard, elle reste d'une étonnante actualité. ■

## BIBLIOGRAPHIE

E. Chassande-Mottin et al., **Des ondelettes pour détecter les ondes gravitationnelles**, *Gazette des Mathématiciens*, n° 148, pp. 61-64, mars 2016.

T. Butz, **Fourier Transformation for Pedestrians**, Springer, 2<sup>e</sup> édition, 2015.

B. B. Hubbard, **Ondes et ondelettes - La saga d'un outil mathématique**, *Pour la Science*, 1995.

Y. Meyer et al., **L'analyse par ondelettes**, *Pour la Science*, septembre 1987, pp. 28-37.