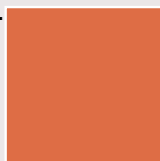


RANGER AU MIEUX DES CARRÉS DANS UN CARRÉ

1

On se donne n carrés de côté 1 (carrés unitaires) et on cherche à les placer dans un carré le plus petit possible. Voici les résultats les meilleurs connus aujourd'hui pour n variant de 1 à 26 (s désigne la longueur du côté du carré dessiné, et l'échelle change à chaque dessin).

$n = 1$



$s = 1$
(immédiat)

2



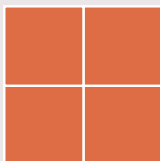
$s = 2$
(démontré par Frits Göbel en 1979)

3



$s = 2$
(démontré par F. Göbel en 1979)

4



$s = 2$
(immédiat)

5



$s = 2 + 1/\sqrt{2} = 2,707...$
(démontré par F. Göbel en 1979)

6



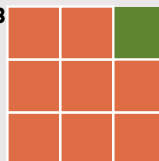
$s = 3$
(démontré par Michael Kearney et Peter Shiu en 2002)

7



$s = 3$
(démontré par Erich Friedman en 1999)

8



$s = 3$
(démontré par E. Friedman en 1999)

9



$s = 3$
(immédiat)

10



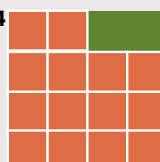
$s = 3 + 1/\sqrt{2} = 3,707...$
(démontré par Walter Stromquist en 1979)

11



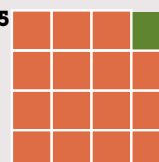
$s = 3,877...$
(trouvé par Walter Trump en 1979)

14



$s = 4$
(démontré par E. Friedman en 1999)

15



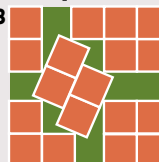
$s = 4$
(démontré par E. Friedman en 1999)

17



$s = 4,675...$
(trouvé par John Bidwell en 1997)

18



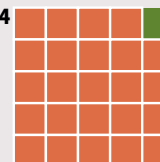
$s = (7 + \sqrt{7})/2 = 4,822...$
(trouvé par Pertti Hämäläinen en 1979)

19



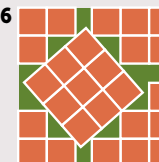
$s = 3 + 4\sqrt{2}/3 = 4,885...$
(trouvé par Robert Wainwright en 1979)

24



$s = 5$
(démontré par E. Friedman en 1999)

26



$s = 7/2 + 3/\sqrt{2} = 5,621...$
(trouvé par E. Friedman en 1997)

d'origine hongroise Paul Erdős s'y est intéressé avec son collègue Ronald Graham. En 1975, ils publièrent un article entièrement consacré à cette question des rangements optimaux de carrés identiques dans un carré.

UNE DOUBLE INÉGALITÉ FACILE

Les premiers résultats généraux concernant ces rangements sont faciles: $s(n^2) = n$ et $\sqrt{n} \leq s(n) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$, où $\lceil x \rceil$ représente la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x (par exemple, $\lceil 3,14 \rceil = 3$). La double inégalité nous indique ainsi que $10 \leq s(105) \leq 11$, car $\sqrt{105} = 10,2469...$

L'affirmation $s(n^2) = n$ est facile: quand on veut placer n^2 carrés unitaires dans un carré, il faut, pour des raisons d'aire, au moins un carré de côté n ; on a donc $s(n^2) \geq n$. Un tel carré suffit évidemment, donc $s(n^2) = n$.

La première inégalité du second résultat provient aussi de la contrainte sur les aires: si on veut placer n carrés unitaires dans un carré de

côté r , il faut que l'aire du carré soit supérieure ou égale à n , soit $r^2 \geq n$; autrement dit, $\sqrt{n} \leq r$.

Pour la seconde inégalité, on utilise que, par définition, $\sqrt{n} < \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$. En élevant au carré, il vient $n < (\lceil \sqrt{n} \rceil + 1)^2$. Si l'on construit des lignes de $(\lceil \sqrt{n} \rceil + 1)$ carrés unitaires serrés les uns contre les autres et qu'on empile ces lignes, on aura épuisé les n carrés unitaires avant d'avoir terminé la ligne $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$. Cela signifie que les n carrés unitaires tiennent dans le carré de côté $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$ et donc que $s(n) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$.

LA PLACE PERDUE

Pour un nombre réel positif s donné, Paul Erdős et Ronald Graham se sont demandé combien au maximum on peut placer de carrés unitaires dans un carré de côté s , et quelle est alors la place perdue. L'aire $A(s)$ de cette place perdue est:

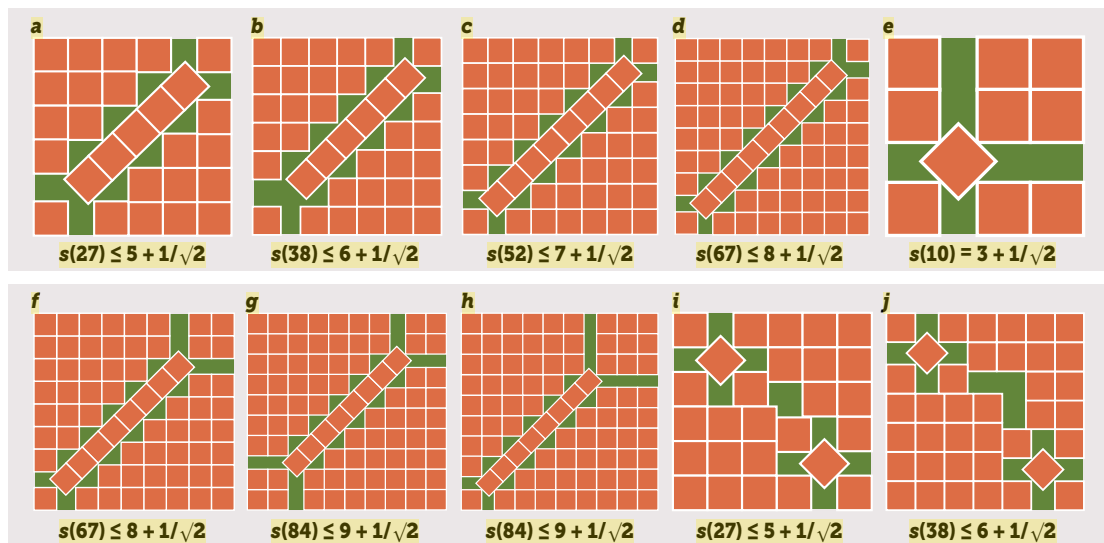
$$A(s) = s^2 - \text{maximum} \{n; s(n) \leq s\}.$$

Dans leur article de 1975, les deux mathématiciens ont montré par une construction >

2

UNE DIAGONALE EFFICACE

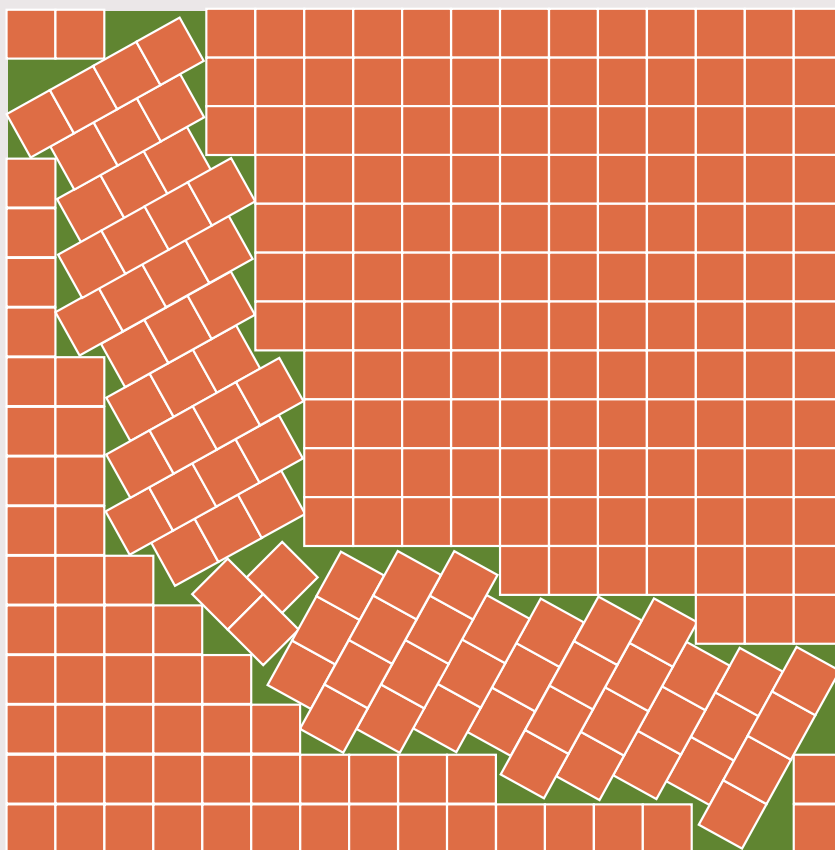
Utiliser une diagonale de carrés pivotés de 45° donne assez souvent la meilleure façon de ranger des carrés dans un carré plus grand. Tel est le cas (a, b, c, d) pour $n = 27, 38, 52, 67$. Parfois, on peut limiter le nombre de carrés tournés, soit aux extrémités de la diagonale (e, f, g, h), soit par des aménagements plus subtils (i, j).



3

LE CAS GÉNÉRAL DE $N^2 - K$ CARRÉS

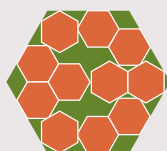
Michael Kearney et Peter Shiu ont démontré que pour ranger $n^2 - 1$ carrés unitaires, il faut un carré de côté n au moins : $s(n^2) = s(n^2 - 1) = n$. Il en est de même pour ranger $n^2 - 2$ carrés unitaires : $s(n^2 - 2) = n$. On a pensé un moment que le résultat restait vrai pour $n^2 - 3, n^2 - 4, \dots, n^2 - n$. Tous les rangements trouvés jusqu'à présent confirment l'exactitude de la conjecture jusqu'à l'entier $n = 16$. Mais pour $n = 17$, on sait que c'est faux grâce à un rangement (ci-contre) proposé par Lars Cleemann : un carré de côté inférieur à 17 permet de ranger $17^2 - 17 = 272$ carrés unitaires.



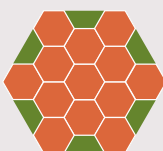
4

RANGER DES HEXAGONES DANS UN HEXAGONE

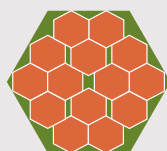
De même que l'on recherche des rangements optimaux de carrés dans des carrés, on peut rechercher des rangements optimaux d'hexagones identiques (de côté 1) dans un hexagone qui soit le plus petit possible. Voici quelques résultats trouvés en 2015 par Maurizio Morandi (sauf pour les cas triviaux $n = 12$ et $n = 13$).



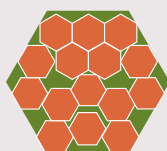
$$s(11) = \frac{5(3 + \sqrt{3})}{6} = 3,943...$$



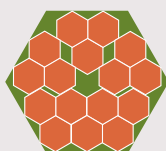
$$s(12) = s(13) = 4$$



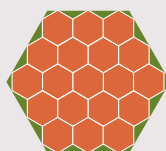
$$s(14) = \frac{37\sqrt{3}}{15} = 4,272...$$



$$s(15) = \frac{73 + 35\sqrt{3}}{30} = 4,454...$$



$$s(16) = \frac{55\sqrt{3}}{21} = 4,536...$$



$$s(17) = s(18) = s(19) = \frac{8}{\sqrt{3}} = 4,618...$$

➤ explicite que $A(s) \leq Cs^{7/11}$, où C est une constante positive. Ainsi, l'aire non recouverte est relativement petite comparée à l'aire du carré s^2 . L'article précise qu'on ne peut pas exclure l'existence d'une majoration de $A(s)$ par une constante D , c'est-à-dire que $A(s) \leq D$. Jugeant cela improbable, les chercheurs indiquaient qu'une conjecture plus raisonnable serait que $A(s) \leq Es^{1/2}$ pour une certaine constante E .

Depuis, Klauss Roth and Robert Vaughan, de l'Imperial College de Londres, ont démontré qu'il n'existe pas de constantes $K > 0$ et $\epsilon < 1/2$ telles que $A(s) \leq Ks^\epsilon$. L'hypothèse $A(s) \leq D$ est donc maintenant exclue. Autrement dit, l'espace perdu en rangeant des carrés unitaires dans un carré de côté s , même en s'y prenant au mieux, dépasse n'importe quelle constante fixée à l'avance : pour certaines valeurs de s , le meilleur rangement laissera par exemple une aire d'un million d'unités non couverte. Reste la conjecture $A(s) \leq Es^{1/2}$, qui attend d'être démontrée ou infirmée.

DANS CERTAINS CAS, FAIRE PIVOTER QUELQUES CARRÉS

Pour certains entiers n , obtenir le meilleur rangement exige de faire pivoter quelques carrés unitaires (voir les encadrés 1 et 2). Pour les petites valeurs de n , l'angle de rotation de ces carrés est toujours de 45° , ce qui explique les $\sqrt{2}$ dans les valeurs de s trouvées. Une question naturelle vient à l'esprit : faut-il parfois faire pivoter des carrés de façon plus compliquée, c'est-à-dire d'un angle différent de 45° ?

La réponse apparaît pour $n=11$, dont le meilleur rangement connu utilise des carrés unitaires tournés d'un angle de $40,182^\circ$. Cette solution proposée pour $n=11$ n'a pas été démontrée optimale, ce n'est qu'un record. L'Américain Walter Stromquist a cependant prouvé en 1984 que $n=11$ est la plus petite valeur de n qui oblige à utiliser un angle de rotation autre que 45° (c'était une conjecture énoncée par Martin Gardner).

Pour obtenir de bons rangements, le Néerlandais Frits Göbel a proposé en 1979 une technique simple et efficace : disposer une diagonale de carrés tournés de 45° . Cette méthode montre que $k^2 + k + 3 + [(k-1)\sqrt{2}]$ carrés unitaires se rangent dans un carré de côté $k + 1 + 1/\sqrt{2}$, grâce à une bande oblique de carrés tournés de 45° . Pour toutes les valeurs de k , sauf 3 et 6, cela donne le meilleur rangement connu. Pour $n = 10$, 67 et 84, il est possible d'économiser quelques rotations de carrés aux extrémités de la bande oblique. Mieux et plus subtil, David Cantrell remarqua en 2005 qu'il existe pour $n=27$, 38 et 52 des rangements équivalents, pour la densité, à la méthode de la bande oblique (voir l'encadré 2), mais utilisant moins de carrés pivotés.

RANGEMENTS

POUR N^2-1 , N^2-2 , ..., N^2-N CARRÉS

Pour ranger n^2 carrés unitaires, il faut nécessairement un carré de côté n (pour une raison d'aire). Il se trouve que c'est encore vrai pour n^2-1 et n^2-2 carrés : $s(n^2-1) = s(n^2-2) = n$. Cette fois, ce n'est pas évident du tout, mais Michael Kearney et Peter Shiu, de l'université de Loughborough, au Royaume-Uni, l'ont démontré en 2002.

Il a aussi été conjecturé plus généralement que lorsque n est assez petit, on a :

$$s(n^2) = s(n^2-1) = s(n^2-2) = \dots = s(n^2-n).$$

L'idée est qu'enlever un carré à un ensemble de n^2 carrés unitaires ne permet pas de les ranger dans un carré de côté inférieur à n , et qu'il en va de même quand on enlève 2 carrés, 3 carrés, ..., n carrés.

Tous les rangements trouvés jusqu'à présent confirment l'exactitude de la conjecture jusqu'à l'entier $n=17$. En revanche, pour $n=17$, on connaît un étonnant rangement de $17^2-17=272$ carrés unitaires dans un carré de côté strictement inférieur à 17. Il est dû à Lars Cleemann (voir l'encadré 3).

On trouvera d'autres exemples de beaux rangements non triviaux dans l'article d'Erich Friedman mentionné dans la bibliographie. ➤