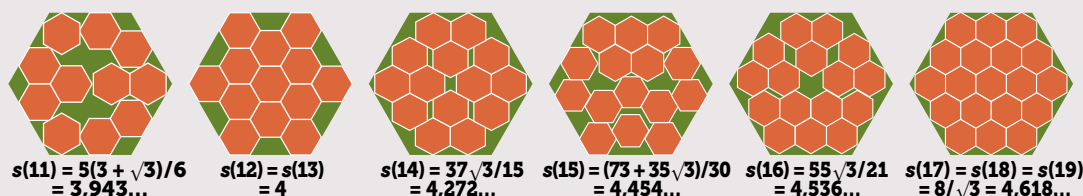


# 4

## RANGER DES HEXAGONES DANS UN HEXAGONE

**D**e même que l'on recherche des rangements optimaux de carrés dans des carrés, on peut rechercher des rangements optimaux d'hexagones identiques (de côté 1) dans un hexagone qui soit le plus petit possible. Voici quelques résultats trouvés en 2015 par Maurizio Morandi (sauf pour les cas triviaux  $n = 12$  et  $n = 13$ ).



> explicite que  $A(s) \leq Cs^{7/11}$ , où  $C$  est une constante positive. Ainsi, l'aire non recouverte est relativement petite comparée à l'aire du carré  $s^2$ . L'article précise qu'on ne peut pas exclure l'existence d'une majoration de  $A(s)$  par une constante  $D$ , c'est-à-dire que  $A(s) \leq D$ . Jugeant cela improbable, les chercheurs indiquaient qu'une conjecture plus raisonnable serait que  $A(s) \leq Es^{1/2}$  pour une certaine constante  $E$ .

Depuis, Klauss Roth and Robert Vaughan, de l'Imperial College de Londres, ont démontré qu'il n'existe pas de constantes  $K > 0$  et  $\epsilon < 1/2$  telles que  $A(s) \leq Ks^\epsilon$ . L'hypothèse  $A(s) \leq D$  est donc maintenant exclue. Autrement dit, l'espace perdu en rangeant des carrés unitaires dans un carré de côté  $s$ , même en s'y prenant au mieux, dépasse n'importe quelle constante fixée à l'avance : pour certaines valeurs de  $s$ , le meilleur rangement laissera par exemple une aire d'un million d'unités non couverte. Reste la conjecture  $A(s) \leq Es^{1/2}$ , qui attend d'être démontrée ou infirmée.

### DANS CERTAINS CAS, FAIRE PIVOTER QUELQUES CARRÉS

Pour certains entiers  $n$ , obtenir le meilleur rangement exige de faire pivoter quelques carrés unitaires (voir les encadrés 1 et 2). Pour les petites valeurs de  $n$ , l'angle de rotation de ces carrés est toujours de  $45^\circ$ , ce qui explique les  $\sqrt{2}$  dans les valeurs de  $s$  trouvées. Une question naturelle vient à l'esprit : faut-il parfois faire pivoter des carrés de façon plus compliquée, c'est-à-dire d'un angle différent de  $45^\circ$  ?

La réponse apparaît pour  $n=11$ , dont le meilleur rangement connu utilise des carrés unitaires tournés d'un angle de  $40,182^\circ$ . Cette solution proposée pour  $n=11$  n'a pas été démontrée optimale, ce n'est qu'un record. L'Américain Walter Stromquist a cependant prouvé en 1984 que  $n=11$  est la plus petite valeur de  $n$  qui oblige à utiliser un angle de rotation autre que  $45^\circ$  (c'était une conjecture énoncée par Martin Gardner).

Pour obtenir de bons rangements, le Néerlandais Frits Göbel a proposé en 1979 une technique simple et efficace : disposer une diagonale de carrés tournés de  $45^\circ$ . Cette méthode montre que  $k^2 + k + 3 + [(k-1)\sqrt{2}]$  carrés unitaires se rangent dans un carré de côté  $k + 1 + 1/\sqrt{2}$ , grâce à une bande oblique de carrés tournés de  $45^\circ$ . Pour toutes les valeurs de  $k$ , sauf 3 et 6, cela donne le meilleur rangement connu. Pour  $n = 10$ , 67 et 84, il est possible d'économiser quelques rotations de carrés aux extrémités de la bande oblique. Mieux et plus subtil, David Cantrell remarqua en 2005 qu'il existe pour  $n=27$ , 38 et 52 des rangements équivalents, pour la densité, à la méthode de la bande oblique (voir l'encadré 2), mais utilisant moins de carrés pivotés.

### RANGEMENTS

#### POUR $N^2-1$ , $N^2-2$ , ..., $N^2-N$ CARRÉS

Pour ranger  $n^2$  carrés unitaires, il faut nécessairement un carré de côté  $n$  (pour une raison d'aire). Il se trouve que c'est encore vrai pour  $n^2-1$  et  $n^2-2$  carrés :  $s(n^2-1) = s(n^2-2) = n$ . Cette fois, ce n'est pas évident du tout, mais Michael Kearney et Peter Shiu, de l'université de Loughborough, au Royaume-Uni, l'ont démontré en 2002.

Il a aussi été conjecturé plus généralement que lorsque  $n$  est assez petit, on a :  $s(n^2) = s(n^2-1) = s(n^2-2) = \dots = s(n^2-n)$ . L'idée est qu'enlever un carré à un ensemble de  $n^2$  carrés unitaires ne permet pas de les ranger dans un carré de côté inférieur à  $n$ , et qu'il en va de même quand on enlève 2 carrés, 3 carrés, ...,  $n$  carrés.

Tous les rangements trouvés jusqu'à présent confirment l'exactitude de la conjecture jusqu'à l'entier  $n=17$ . En revanche, pour  $n=17$ , on connaît un étonnant rangement de  $17^2 - 17 = 272$  carrés unitaires dans un carré de côté strictement inférieur à 17. Il est dû à Lars Cleemann (voir l'encadré 3).

On trouvera d'autres exemples de beaux rangements non triviaux dans l'article d'Erich Friedman mentionné dans la bibliographie. >

## 5

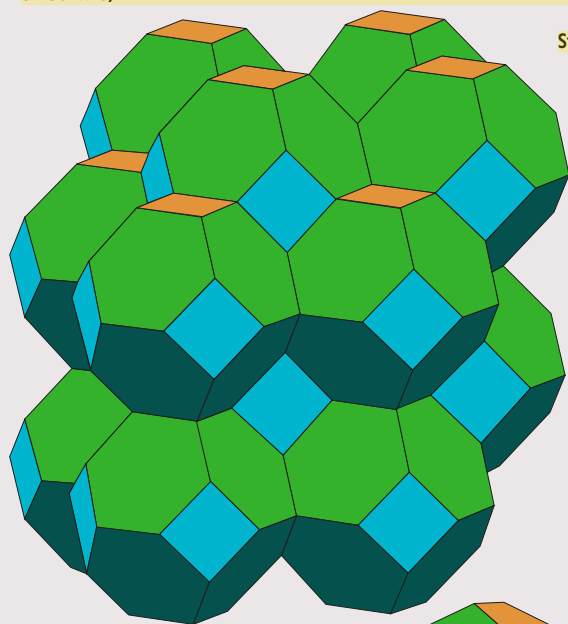
## LES STRUCTURES DE KELVIN ET DE WEAIRE-PHELAN

**E**n 1887, lord Kelvin réfléchissait au problème du pavage de l'espace par  $n$  cellules de même volume le remplissant parfaitement. On connaît plusieurs polyèdres qui pavent l'espace parfaitement, le cube étant le plus simple. Kelvin se demandait quel était celui ayant la surface la plus petite. Il proposa un polyèdre aujourd'hui appelé « structure de Kelvin ». Cette forme a été considérée optimale

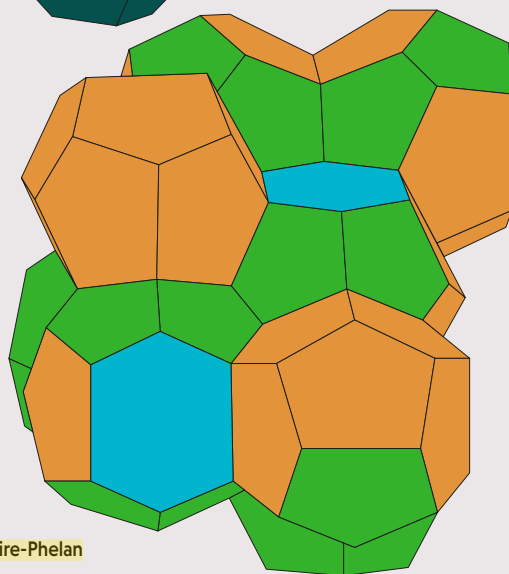
jusqu'en 1993, date à laquelle les physiciens Denis Weaire et Robert Phelan ont découvert une structure un peu meilleure. On la nomme bien sûr « structure de Weaire-Phelan ». Elle est composée de deux formes différentes de même volume.

Ces structures intéressent les architectes (voir <https://archpaper.com/2012/05/tomas-saracenos-cloud-city/>). Elles sont aussi importantes dans l'étude des mousses (voir T. Daxner et al., « Space-filling polyhedra as mechanical models for solidified dry foams », *Materials Transactions*, vol. 47(9), pp. 2213-2218, 2006, article téléchargeable sur <https://www.jim.or.jp/journal/e/pdf3/47/09/2213.pdf> ou sur [http://orbit.dtu.dk/files/87595654/Space\\_filling\\_polyhedra.pdf](http://orbit.dtu.dk/files/87595654/Space_filling_polyhedra.pdf)).

On trouve sur le site internet de Guy Inchbald les patrons de la construction des deux bulles de la structure de Weaire-Phelan (<http://www.steelpillow.com/polyhedra/wp/wp.htm>). La structure de Weaire-Phelan a inspiré la conception du Centre aquatique des jeux de Pékin en 2008 (voir la photographie page ci-contre).



Structure de Kelvin



Structure de Weaire-Phelan

## &gt; AVEC D'AUTRES FORMES GÉOMÉTRIQUES

Le merveilleux et très complet site internet d'Erich Friedman (<https://www2.stetson.edu/~efriedma/packing.html>) énumère une multitude d'autres résultats au sujet des rangements de formes géométriques dans une forme géométrique. On y trouve par exemple la liste des résultats connus pour :

- le rangement de  $n$  cercles de rayon 1 dans un cercle aussi petit que possible ;
- le rangement de  $n$  carrés de côté 1 dans un cercle aussi petit que possible ;
- le rangement de  $n$  triangles équilatéraux de côté 1 dans un carré aussi petit que possible.

L'encadré 4 montre quelques records récents trouvés pour le rangement d'hexagones réguliers de côté 1 dans un hexagone régulier. Plusieurs ont été découverts par Maurizio Morandi, un amateur italien vivant à Modène. Ils prouvent que, dans la liste infinie d'énigmes de rangement géométrique, il est possible à toute personne un peu décidée et soigneuse de trouver de meilleurs rangements que ceux connus. Si, un jour d'ennui, vous souhaitez ajouter une pierre à l'édifice des mathématiques en train de se faire, consultez le site d'Erich Friedman pour connaître les derniers records et attaquez-vous à l'un d'eux pour une valeur de  $n$  assez grande. Une autre méthode consiste à écrire un programme informatique comme il en existe déjà quelques-uns. Voir par exemple : <https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/geometry/packing-and-covering-problems/geometric-packing-in-2d/>

## RANGEMENTS DANS LE PLAN ET L'ESPACE ENTIER

Lorsque, à la place des rangements géométriques dans un espace fermé et limité, on s'interroge sur les rangements géométriques optimaux dans le plan ou l'espace tout entier, on tombe sur un domaine mathématique aux résultats souvent simples à énoncer, mais dont les démonstrations sont si délicates et difficiles que certaines ne sont maîtrisées que depuis peu ou sont même encore recherchées. Voici les cinq plus intéressants problèmes géométriques de rangement du plan et de l'espace, avec l'état actuel des avancées.

**Théorème de Thue.** La façon la plus dense de disposer des disques de rayon 1 dans le plan est le rangement hexagonal (les centres des disques sont placés comme les centres des hexagones dans le classique pavage du plan par des hexagones). La densité de ce rangement le plus serré possible est  $\pi/\sqrt{12} = 0,906899...$

En 1773, Lagrange démontra ce résultat, mais en n'envisageant que des dispositions périodiques des disques et donc sans prendre en compte d'éventuelles dispositions irrégulières. En 1910, le mathématicien norvégien Axel Thue, en incluant cette fois toutes les



Le Centre aquatique de Pékin, la nuit. Il a été construit pour les jeux Olympiques de 2008.

dispositions possibles, régulières ou non, proposa une nouvelle démonstration du résultat. Sa démonstration est considérée incomplète et la preuve définitive du théorème fut donnée par le Hongrois László Tóth en 1940.

**Théorème des nids d'abeilles.** La façon de paver le plan par des pavés de même forme, d'aire unité et dont le périmètre soit le plus petit possible est le pavage classique du plan par des hexagones (pavage en nid d'abeilles). Pappus d'Alexandrie, au IV<sup>e</sup> siècle de notre ère, considérait que les abeilles utilisent cette forme pour leur ruche car c'est celle qui, pour une quantité de cire donnée, est la plus économique pour renfermer une certaine quantité de miel. Pour Charles Darwin, ce sont les mécanismes de la sélection naturelle qui ont conduit les abeilles à cette solution optimale.

Le résultat mathématique est difficile à démontrer, car là encore il faut prendre en compte les réseaux irréguliers et établir qu'aucun ne peut être meilleur que le réseau hexagonal. Le théorème n'a été démontré qu'en 1999 par l'Américain Thomas Hales.

**Le théorème de Kepler-Hales.** La façon la plus dense de ranger des sphères dans l'espace a pour densité  $\pi/3\sqrt{2} = 0,74048...$  Les marchands, par exemple, l'utilisent pour leurs étalages d'oranges ou de pommes.

Resté longtemps une conjecture sous le nom de « conjecture de Kepler », le théorème a été établi par Thomas Hales en 1998. Pour certaines parties de la démonstration, il utilisait des programmes informatiques. Comme un doute persistait sur la validité de ces travaux, on a recherché une preuve formelle, telle que chaque pas de raisonnement soit contrôlé par un assistant de preuve informatique. Le projet, intitulé Flyspeck et conduit par Thomas Hales lui-même, a abouti en 2014, en produisant cette preuve formelle considérée aujourd'hui comme satisfaisante.

**La conjecture de rangement d'Ulam.** Il n'existe pas de forme convexe bornée de l'espace donnant lieu à un rangement optimum moins bon en densité qu'avec la sphère.

Cette conjecture n'est pas démontrée. Il faut être attentif à ce qu'elle affirme: pour chaque forme convexe bornée de l'espace (par exemple un cube, un tétraèdre, un ballon de rugby...), on considère la façon optimale de disposer des exemplaires dans l'espace, et on affirme que la forme dont le rangement optimal est le moins bon en densité est la sphère. Le rangement optimal pour la sphère est donné par le théorème de Kepler-Hales et a une densité de  $\pi/3\sqrt{2}$ . La conjecture affirme donc que toute forme bornée et convexe de l'espace peut donner lieu à un rangement de densité supérieure ou égale à  $\pi/3\sqrt{2}$ .

**Le problème de Kelvin.** En 1887, lord Kelvin se demanda comment découper l'espace en bulles de même volume et en ne laissant aucun espace entre elles de telle façon que la surface de chaque bulle soit minimale (c'est l'analogue dans l'espace du problème du nid d'abeilles). Il proposa un polyèdre comportant 8 faces hexagonales et 6 faces carrées. Pendant un siècle, personne ne proposa de structure meilleure que celle de Kelvin. Mais en 1993, les physiciens Denis Weaire et Robert Phelan, du Trinity College, à Dublin, découvrirent à l'aide d'un calcul d'ordinateur une nouvelle structure composée de deux formes de même volume répondant au problème et meilleure que celle de Kelvin de 0,3%. On n'a pas encore démontré que la structure de Weaire-Phelan est optimale (voir l'encadré 5).

Pour ces problèmes de rangement, l'ordinateur est indispensable, aussi bien pour découvrir de nouvelles formes et rangements que pour assurer que les démonstrations trouvées sont correctes. Le mathématicien aura encore besoin de ce nouvel ami. ■

## BIBLIOGRAPHIE

**Weaire-Phelan structure**, Wikipedia, consulté en 2018 ([https://en.wikipedia.org/wiki/Weaire-Phelan\\_structure](https://en.wikipedia.org/wiki/Weaire-Phelan_structure)).

**W. Bentz, Optimal packings of 22 and 33 unit squares in a square**, prépublication arXiv:1606.03746, 2016.

**E. Friedman, Packing unit squares in squares : A survey and new results**, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2009 (<https://www2.stetson.edu/~efriedma/papers/squares/squares.html>).

**M. Gardner, Mathematical Games**, *Scientific American*, octobre 1979 (compléments donnés en novembre 1979, mars et novembre 1980). Repris dans : M. Gardner, *Fractal Music, Hypercards and More*, W. H. Freeman and Company, pp. 289-306, 1991.

**F. Göbel, Geometrical packing and covering problems**, dans *Packing and Covering in Combinatorics*, A. Schrijver (ed.), *Math. Centre Tracts*, vol. 106, pp. 179-199, 1979.

**P. Erdős et R. Graham, On packing squares with equal squares**, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 19, pp. 119-123, 1975.