



Le Centre aquatique de Pékin, la nuit. Il a été construit pour les jeux Olympiques de 2008.

dispositions possibles, régulières ou non, proposa une nouvelle démonstration du résultat. Sa démonstration est considérée incomplète et la preuve définitive du théorème fut donnée par le Hongrois László Tóth en 1940.

Théorème des nids d'abeilles. La façon de paver le plan par des pavés de même forme, d'aire unité et dont le périmètre soit le plus petit possible est le pavage classique du plan par des hexagones (pavage en nid d'abeilles). Pappus d'Alexandrie, au IV^e siècle de notre ère, considérait que les abeilles utilisent cette forme pour leur ruche car c'est celle qui, pour une quantité de cire donnée, est la plus économique pour renfermer une certaine quantité de miel. Pour Charles Darwin, ce sont les mécanismes de la sélection naturelle qui ont conduit les abeilles à cette solution optimale.

Le résultat mathématique est difficile à démontrer, car là encore il faut prendre en compte les réseaux irréguliers et établir qu'aucun ne peut être meilleur que le réseau hexagonal. Le théorème n'a été démontré qu'en 1999 par l'Américain Thomas Hales.

Le théorème de Kepler-Hales. La façon la plus dense de ranger des sphères dans l'espace a pour densité $\pi/3\sqrt{2} = 0,74048...$ Les marchands, par exemple, l'utilisent pour leurs étalages d'oranges ou de pommes.

Resté longtemps une conjecture sous le nom de « conjecture de Kepler », le théorème a été établi par Thomas Hales en 1998. Pour certaines parties de la démonstration, il utilisait des programmes informatiques. Comme un doute persistait sur la validité de ces travaux, on a recherché une preuve formelle, telle que chaque pas de raisonnement soit contrôlé par un assistant de preuve informatique. Le projet, intitulé Flyspeck et conduit par Thomas Hales lui-même, a abouti en 2014, en produisant cette preuve formelle considérée aujourd'hui comme satisfaisante.

La conjecture de rangement d'Ulam. Il n'existe pas de forme convexe bornée de l'espace donnant lieu à un rangement optimum moins bon en densité qu'avec la sphère.

Cette conjecture n'est pas démontrée. Il faut être attentif à ce qu'elle affirme: pour chaque forme convexe bornée de l'espace (par exemple un cube, un tétraèdre, un ballon de rugby...), on considère la façon optimale de disposer des exemplaires dans l'espace, et on affirme que la forme dont le rangement optimal est le moins bon en densité est la sphère. Le rangement optimal pour la sphère est donné par le théorème de Kepler-Hales et a une densité de $\pi/3\sqrt{2}$. La conjecture affirme donc que toute forme bornée et convexe de l'espace peut donner lieu à un rangement de densité supérieure ou égale à $\pi/3\sqrt{2}$.

Le problème de Kelvin. En 1887, lord Kelvin se demanda comment découper l'espace en bulles de même volume et en ne laissant aucun espace entre elles de telle façon que la surface de chaque bulle soit minimale (c'est l'analogue dans l'espace du problème du nid d'abeilles). Il proposa un polyèdre comportant 8 faces hexagonales et 6 faces carrées. Pendant un siècle, personne ne proposa de structure meilleure que celle de Kelvin. Mais en 1993, les physiciens Denis Weaire et Robert Phelan, du Trinity College, à Dublin, découvrirent à l'aide d'un calcul d'ordinateur une nouvelle structure composée de deux formes de même volume répondant au problème et meilleure que celle de Kelvin de 0,3%. On n'a pas encore démontré que la structure de Weaire-Phelan est optimale (voir l'encadré 5).

Pour ces problèmes de rangement, l'ordinateur est indispensable, aussi bien pour découvrir de nouvelles formes et rangements que pour assurer que les démonstrations trouvées sont correctes. Le mathématicien aura encore besoin de ce nouvel ami. ■

BIBLIOGRAPHIE

Weaire-Phelan structure, Wikipedia, consulté en 2018 (https://en.wikipedia.org/wiki/Weaire-Phelan_structure).

W. Bentz, Optimal packings of 22 and 33 unit squares in a square, prépublication arXiv:1606.03746, 2016.

E. Friedman, Packing unit squares in squares : A survey and new results, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2009 (<https://www2.stetson.edu/~efriedma/papers/squares/squares.html>).

M. Gardner, Mathematical Games, *Scientific American*, octobre 1979 (compléments donnés en novembre 1979, mars et novembre 1980). Repris dans : M. Gardner, *Fractal Music, Hypercards and More*, W. H. Freeman and Company, pp. 289-306, 1991.

F. Göbel, Geometrical packing and covering problems, dans *Packing and Covering in Combinatorics*, A. Schrijver (ed.), *Math. Centre Tracts*, vol. 106, pp. 179-199, 1979.

P. Erdős et R. Graham, On packing squares with equal squares, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 19, pp. 119-123, 1975.