

# R

## ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul  
P.86 Art & science  
P.88 Idées de physique  
P.92 Chroniques de l'évolution  
P.96 Science & gastronomie  
P.98 À picorer

# MYSTÉRIEUX DIVISEURS

La somme des diviseurs d'un nombre entier suscite une multitude d'interrogations. Depuis plus de deux millénaires, des passionnés tentent d'y répondre. Une tâche inachevée!

Marin Mersenne (1588-1648)



**L**es diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. Si l'on ne considère que les diviseurs de 6 différents de 6, que l'on dénomme *parties aliquotes* de 6, ce sont 1, 2 et 3. Leur somme est égale à 6. Ainsi, la somme des parties aliquotes de 6 vaut 6. Depuis l'Antiquité, cette propriété inattendue intrigue les amateurs d'arithmétique et l'on appelle « nombres parfaits » les entiers, tels que 6, dont la somme de leurs parties aliquotes est égale à eux-mêmes.

L'entier 28, dont les parties aliquotes sont 1, 2, 4, 7 et 14 est le deuxième nombre parfait. Les pythagoriciens se sont intéressés à ces nombres, mais même plus tard dans l'Antiquité, on n'a trouvé que les quatre plus petits qui sont 6, 28, 496 et 8128. Au tournant de notre ère, Philon d'Alexandrie, dans son ouvrage sur la Création,

mentionne que si le monde a été créé en 6 jours et que la Lune tourne autour de la Terre en 28 jours, c'est parce que 6 et 28 sont des nombres parfaits. Saint Augustin (354-430) a repris la première affirmation.

Les nombres parfaits au-delà de 8128 sont 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128, etc. On connaît aujourd'hui 50 nombres parfaits. Ils sont tous de la forme  $2^{p-1}(2^p-1)$  où  $2^p-1$  est un nombre premier. Les valeurs de  $p$  qui donnent les nombres parfaits connus sont :

2, qui donne  $2^1(2^2-1)=6$ ; 3, qui donne  $2^2(2^3-1)=28$ ; 5, qui donne  $2^4(2^5-1)=496$ ; 7; 13; 17; 19; 31; 61; 89; 107; 127; 521; 607; 1279; 2203; 2281; 3217; 4253; 4423; 9689; 9941; 11213; 19937; 21701; 23209; 44497; 86243; 110503; 132049; 216091; 756839; 859433; 1257787; 1398269; 2976221; 3021377; 6972593; 13466917;

## NOMBRES PREMIERS ET SUITES ALIQUOTES

**L**e 3 janvier 2018, Jonathan Pace, à l'université Stanford, recherchait par ordinateur des grands nombres premiers et participait ainsi à un grand calcul distribué fonctionnant depuis plus de 20 ans. Il a eu la chance de trouver le nombre  $2^{77\,232\,917} - 1$ . C'est le plus grand nombre premier connu, et il a plus de 23 millions de chiffres décimaux. Si vous souhaitez tenter votre chance, consultez le site internet GIMPS qui coordonne cette recherche de nombres premiers records : <https://www.mersenne.org>.

Ce nombre premier est un nombre de Mersenne, c'est-à-dire de la forme  $2^k - 1$ . En espaçant les chiffres d'un millimètre, l'écriture du

nombre premier record occuperait une longueur de 23 kilomètres, et au rythme d'un chiffre par seconde, il vous faudrait 269 jours pour l'écrire. La découverte détermine le 50<sup>e</sup> nombre parfait, qui est :  $2^{77\,232\,916}(2^{77\,232\,917} - 1)$ . Ce nombre parfait a deux fois plus de chiffres décimaux que le nombre premier qui lui donne naissance. Les nombres parfaits sont ceux qui sont égaux à la somme de leurs « parties aliquotes », c'est-à-dire de leurs diviseurs différents d'eux-mêmes. Les trois plus petits sont :  
 $6 = 1 + 2 + 3$ ;  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ;  
 $496 = 2^4(2^5 - 1) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ .

On notera  $s(n)$  la somme des parties aliquotes de l'entier  $n$ .

Voici quelques définitions complémentaires :

- $n$  est parfait si  $s(n) = n$ .
- $n$  et  $m$  forment une paire amiable si  $s(n) = m$  et  $s(m) = n$ .
- $n_1, n_2, \dots, n_k$  constituent une chaîne sociable si :  
 $s(n_1) = n_2, s(n_2) = n_3, \dots, s(n_k) = n_1$ .
- La suite aliquote partant de  $n$  est la suite :  
 $n, s(n), s(s(n)), s(s(s(n))), \dots$

20996011; 24036583; 25964951; 30402457; 32582657; 37156667; 42643801; 43112609; 57885161; 74207281; 77232917.

Les plus grands, à partir du  $35^e$ , proviennent des calculs du projet GIMPS (<https://www.mersenne.org/primes/>) qui, depuis 1996, organise une recherche distribuée systématique pour découvrir ces nombres. Et il est possible qu'entre les trois derniers de la liste se glissent d'autres nombres parfaits pairs non encore découverts.

Les nombres premiers de la forme  $2^p - 1$  sont dénommés «nombres premiers de Mersenne». Vers 300 avant notre ère, Euclide, dans le livre IX de ses *Éléments*, a démontré que si  $2^p - 1$  est un nombre premier, alors  $2^{p-1}(2^p - 1)$  est un nombre parfait pair. Au  $xviii^e$  siècle, le grand Leonhard Euler a prouvé la réciproque: si un nombre pair est parfait, alors il est nécessairement de la forme  $2^{p-1}(2^p - 1)$  où  $p$  est tel que  $2^p - 1$  soit un nombre premier. Trouver des nombres premiers de Mersenne est donc équivalent à trouver des nombres parfaits pairs. GIMPS signifie d'ailleurs *Great internet Mersenne Primes Search*.

On déduit de la caractérisation des nombres parfaits par Euclide et Euler que les nombres parfaits pairs à partir de 28 sont des sommes de cubes de nombres impairs successifs. On a par exemple:  $28 = 1^3 + 3^3$ ;  $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$ ;  $8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$ .

Bien que connaissant la forme que prend nécessairement tout nombre parfait pair, on ne sait pas démontrer qu'il en existe une infinité. On conjecture que oui.

À l'inverse, on pense qu'il n'existe aucun nombre parfait impair, mais c'est encore une affirmation non démontrée. Les travaux mathématiques sur les nombres parfaits impairs ont

conduit à quelques résultats remarquables qui montrent que, s'il en existe, ils seront difficiles à trouver. On sait que si  $N$  est un nombre parfait impair, alors il est supérieur à  $10^{1500}$  et comporte au moins 101 diviseurs premiers (résultat de Pascal Ochem et Michaël Rao, publié en 2012). Parmi les facteurs premiers d'un tel  $N$ , s'il existe, au moins 10 sont distincts (résultat de Pace Nielsen, publié en 2015). De plus, si 3 n'est pas un diviseur de  $N$ , alors  $N$  comporte au moins 12 facteurs premiers distincts (résultat de Pace Nielsen, publié en 2007).

## UN MILLIARD DE PAIRES AMIABLES

Si l'on note  $s(n)$  la somme des parties aliquotes de  $n$  et qu'on s'amuse à calculer patiemment les valeurs de cette fonction, entier après entier, on découvre que  $s(220) = 284$  et que  $s(284) = 220$ . En effet, 284 est divisible par 1, 2, 4, 71 et 142, dont la somme est 220, tandis que 220 est divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110, dont la somme est 284.

Cette association miraculeuse des entiers 220 et 284 a retenu l'attention des amateurs de nombres qui ont qualifié de tels couples, où la somme des diviseurs de l'un est égale à la valeur de l'autre, de «paires amiables» ou «paires aimables» ou «nombres amicaux». Les dix premières paires amiables sont: 220-284, 1184-1210, 2620-2924, 5020-5564, 6232-6368, 10744-10856, 12285-14595, 17296-18416, 63020-76084, 66928-66992.

Avant Euler, on ne connaissait que trois paires de nombres amiables. Ne dédaignant pas ces problèmes arithmétiques, Euler découvrit cinq méthodes pour construire des paires de nombres amiables. Grâce à elles, il proposa >

## L'AUTEUR



**JEAN-PAUL DELAHAYE**  
professeur émérite  
à l'université de Lille  
et chercheur au Centre  
de recherche en  
informatique, signal  
et automatique de Lille  
(Cristal)

2

## LES DIVISEURS D'UN ENTIER

**U**n fois qu'un entier  $n$  est écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers, par exemple  $n = 3\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$ , il est facile de connaître ses diviseurs et leur somme sans faire de calculs compliqués. Expliquons pourquoi. Les diviseurs de  $n$  sont les nombres ayant comme facteurs premiers des nombres premiers pris parmi ceux qui apparaissent dans la décomposition de  $n$ , avec des exposants inférieurs ou égaux à ceux qui y apparaissent. Pour  $n = 3\,400$ , il y aura donc:  $2^3 \cdot 5 \cdot 17$ ,  $2^2 \cdot 5^2 \cdot 17$ ,  $2^2 \cdot 5$ ,  $5^2$ ,  $5^2 \cdot 17$ , etc. La somme  $S(3\,400)$  des diviseurs de 3 400 (en acceptant 3 400 lui-même) est alors assez facile à connaître sans avoir à les énumérer. Elle est

donnée en développant le produit  $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2)(1 + 17)$ . En effet, pour développer ce produit, on prend un terme dans chaque parenthèse et on les multiplie, ce qui donne exactement la somme des diviseurs. On utilise ensuite la formule  $(1 + a + a^2 + \dots + a^k) = (a^{k+1} - 1)/(a - 1)$ , d'où:  $S(3\,400) = [(2^4 - 1)/(2 - 1)] \times [(5^3 - 1)/(5 - 1)] \times [(17^2 - 1)/(17 - 1)] = (15 \times 124 \times 288)/(4 \times 16) = 8\,370$ .

On vérifie le résultat en recherchant patiemment tous les diviseurs de 3 400 et en les additionnant:  $S(3\,400) = 1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 10 + 17 + 20 + 25 + 34 + 40 + 50 + 68 + 85 + 100 + 136 + 170 + 200 + 340 + 425 + 680 + 850 + 1\,700 + 3\,400 = 8\,370$ .

La méthode décrite avec 3 400 est, bien sûr, générale. On comprend que le problème de calculer la somme des diviseurs d'un entier se réduit à celui de sa factorisation en produit de nombres premiers. Comme le problème de la factorisation est difficile, le problème du calcul de la somme des diviseurs d'un nombre l'est aussi. Cela rend délicats et longs les calculs pour trouver les nombres parfaits, les paires amiables, les chaînes sociables et, bien entendu, les suites aliquotes.

C'est aussi ce qui explique l'impossibilité pratique de continuer le calcul d'une suite aliquote quand on arrive à de très grands nombres ayant de grands facteurs premiers.