20 996 011 ; 24 036 583 ; 25 964 951 ; 30 402 457 ; 32 582 657 ; 37 156 667 ; 42 643 801 ; 43 112 609 ; 57 885 161 ; 74 207 281 ; 77 232 917.

Les plus grands, à partir du 35e, proviennent des calculs du projet GIMPS (https://www.mersenne.org/primes/) qui, depuis 1996, organise une recherche distribuée systématique pour découvrir ces nombres. Et il est possible qu'entre les trois derniers de la liste se glissent d'autres nombres parfaits pairs non encore découverts.

Les nombres premiers de la forme 2^p-1 sont dénommés « nombres premiers de Mersenne ». Vers 300 avant notre ère, Euclide, dans le livre IX de ses *Éléments*, a démontré que si 2^p-1 est un nombre premier, alors $2^{p-1}(2^p-1)$ est un nombre parfait pair. Au XVIIe siècle, le grand Leonhard Euler a prouvé la réciproque : si un nombre pair est parfait, alors il est nécessairement de la forme $2^{p-1}(2^p-1)$ où p est tel que 2^p-1 soit un nombre premier. Trouver des nombres premiers de Mersenne est donc équivalent à trouver des nombres parfaits pairs. GIMPS signifie d'ailleurs *Great internet Mersenne Primes Search*.

On déduit de la caractérisation des nombres parfaits par Euclide et Euler que les nombres parfaits pairs à partir de 28 sont des sommes de cubes de nombres impairs successifs. On a par exemple : $28 = 1^3 + 3^3$; $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$; $8128 = 1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3$.

Bien que connaissant la forme que prend nécessairement tout nombre parfait pair, on ne sait pas démontrer qu'il en existe une infinité. On conjecture que oui.

À l'inverse, on pense qu'il n'existe aucun nombre parfait impair, mais c'est encore une affirmation non démontrée. Les travaux mathématiques sur les nombres parfaits impairs ont conduit à quelques résultats remarquables qui montrent que, s'il en existe, ils seront difficiles à trouver. On sait que si N est un nombre parfait impair, alors il est supérieur à 10^{1500} et comporte au moins 101 diviseurs premiers (résultat de Pascal Ochem et Michaël Rao, publié en 2012). Parmi les facteurs premiers d'un tel N, s'il existe, au moins 10 sont distincts (résultat de Pace Nielsen, publié en 2015). De plus, si 3 n'est pas un diviseur de N, alors N comporte au moins 12 facteurs premiers distincts (résultat de Pace Nielsen, publié en 2007).

UN MILLIARD DE PAIRES AMIABLES

Si l'on note $s(n)$ la somme des parties aliquotes de n et qu'on s'amuse à calculer patiemment les valeurs de cette fonction, entier après entier, on découvre que $s(220) = 284$ et que $s(284) = 220$. En effet, 284 est divisible par 1, 2, 4, 71 et 142, dont la somme est 220, tandis que 220 est divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110, dont la somme est 284.

Cette association miraculeuse des entiers 220 et 284 a retenu l'attention des amateurs de nombres qui ont qualifié de tels couples, où la somme des diviseurs de l'un est égale à la valeur de l'autre, de « paires amiables » ou « paires aimables » ou « nombres amicaux ». Les dix premières paires amiables sont : 220-284, 1184-1210, 2620-2924, 5020-5564, 6232-6368, 10 744-10 856, 12 285-14 595, 17 296-18 416, 63 020-76 084, 66 928-66 992.

Avant Euler, on ne connaissait que trois paires de nombres amiables. Ne dédaignant pas ces problèmes arithmétiques, Euler découvrit cinq méthodes pour construire des paires de nombres amiables. Grâce à elles, il proposa >

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal)

2

LES DIVISEURS D'UN ENTIER

Une fois qu'un entier n est écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers, par exemple $n = 3\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$, il est facile de connaître ses diviseurs et leur somme sans faire de calculs compliqués. Expliquons pourquoi. Les diviseurs de n sont les nombres ayant comme facteurs premiers des nombres premiers pris parmi ceux qui apparaissent dans la décomposition de n, avec des exposants inférieurs ou égaux à ceux qui y apparaissent. Pour $n = 3\,400$, il y aura donc : $2^3 \cdot 5 \cdot 17$, $2^2 \cdot 5^2 \cdot 17$, $2^2 \cdot 5$, 5^2, $5^2 \cdot 17$, etc. La somme $S(3\,400)$ des diviseurs de 3 400 (en acceptant 3 400 lui-même) est alors assez facile à connaître sans avoir à les énumérer. Elle est donnée en développant le produit $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2)(1 + 17)$. En effet, pour développer ce produit, on prend un terme dans chaque parenthèse et on les multiplie, ce qui donne exactement la somme des diviseurs. On utilise ensuite la formule $(1 + a + a^2 + \ldots + a^k) = (a^{k+1} - 1)/(a - 1)$, d'où : $S(3\,400) = [(2^4 - 1)/(2 - 1)] \times [(5^3 - 1)/(5 - 1)] \times [(17^2 - 1)/(17 - 1)] = (15 \times 124 \times 288)/(4 \times 16) = 8\,370$.

On vérifie le résultat en recherchant patiemment tous les diviseurs de 3 400 et en les additionnant : $S(3\,400) = 1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 10 + 17 + 20 + 25 + 34 + 40 + 50 + 68 + 85 + 100 + 136 + 170 + 200 + 340 + 425 + 680 + 850 + 1\,700 + 3\,400 = 8\,370$.

La méthode décrite avec 3 400 est, bien sûr, générale. On comprend que le problème de calculer la somme des diviseurs d'un entier se réduit à celui de sa factorisation en produit de nombres premiers. Comme le problème de la factorisation est difficile, le problème du calcul de la somme des diviseurs d'un nombre l'est aussi. Cela rend délicats et longs les calculs pour trouver les nombres parfaits, les paires amiables, les chaînes sociables et, bien entendu, les suites aliquotes.

C'est aussi ce qui explique l'impossibilité pratique de continuer le calcul d'une suite aliquote quand on arrive à de très grands nombres ayant de grands facteurs premiers.