

> 59 nouvelles paires. Adrien-Marie Legendre proposa aussi une nouvelle paire de nombres amiables en 1830.

Le mathématicien belge Paul Poulet, mort en 1946, fut le premier à utiliser, à la main bien sûr, les tests de primalité mis au point au XIX^e siècle par le Français Édouard Lucas, inventeur du fameux casse-tête des tours de Hanoï. Poulet en tira 105 nouvelles paires de nombres amiables.

En 1946, on connaissait 390 paires de ce type. Grâce aux ordinateurs, on a pu aller bien plus loin. En 2002, quand j'abordai ce sujet dans un article de *Pour la Science*, on connaissait seulement 2 millions de paires amiables. Aujourd'hui (au 8 janvier 2019), on en

on démontre que s'il existe une paire amiable (m, n) pour laquelle m et n n'ont pas de diviseurs communs, alors le produit mn dépasse 10^{67} .

Le mathématicien hongrois Paul Erdős (toujours lui!) a prouvé en 1955 que la proportion de nombres entiers appartenant à une paire amiable parmi les entiers inférieurs à n tend vers 0 quand n tend vers l'infini: la densité des nombres amiables est nulle.

Quand on additionne les deux nombres d'une paire amiable, par exemple $6232 + 6368 = 12600$, on remarque qu'assez fréquemment cette somme est divisible par 10. Une exploration systématique indique que 73 des 100 premières paires ont une somme divisible par 10 et que 825 des 1000 premières paires ont une somme divisible par 10. On conjecture donc que la proportion de paires amiables dont la somme est divisible par 10 tend vers 100% quand on fait tendre vers l'infini le nombre de paires prises en compte.



La proportion des entiers appartenant à une paire amiable tend vers zéro



connaît 1222571199 et ce nombre change tous les jours. Elles se trouvent sur le site internet <https://sech.me/ap/> tenu par Sergei Chernykh, un passionné de nombres qui vit à Stockholm.

Un projet de calcul distribué dédié à cette recherche a été mis en place dont l'objectif est de connaître toutes les paires amiables dont le plus petit élément est inférieur à 10^{20} (voir <https://sech.me/boinc/Amicable/>).

Le site de Sergei Chernykh indique combien les chercheurs de paires de nombres amiables en ont trouvé. Il précise par exemple que Legendre en a trouvé une, que Poulet en a trouvé 105 et que les deux plus gros découvreurs sont Robert Gerbicz, qui en a trouvé 173470689 et Sergei Chernykh lui-même, qui détient le record avec 1029730080 paires amiables à son actif, soit plus de 80% des paires connues!

Les deux nombres des paires amiables connues ont toujours la même parité: ils sont tous deux pairs ou impairs. On ignore s'il existe des paires amiables de type pair-impair, mais s'il en existe, on démontre que le nombre pair sera un carré ou le double d'un carré.

On constate que les entiers d'une paire de nombres amiables ont toujours un diviseur commun. On ignore si cela est vrai en général, mais

LES CHÂÎNES SOCIABLES

Parfois, lorsqu'on part d'un entier n et que l'on calcule $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$, etc., on retombe sur n . On nomme «chaînes sociables» ces suites qui reviennent à leur point de départ. Si l'on retrouve n tout de suite, c'est que n est un nombre parfait; si on le retrouve seulement avec $s(s(n))$, c'est que n et $s(n)$ forment une paire amiable. Les autres chaînes sociables sont assez mal connues et on ne progresse guère à leur sujet. On ne connaît que 5398 chaînes sociables d'ordre 4, 1 d'ordre 5, 5 d'ordre 6, 4 d'ordre 8, 1 d'ordre 9 et 1 d'ordre 28. On ignore par exemple s'il existe des chaînes sociables à trois maillons $n \rightarrow s(n) \rightarrow s(s(n)) \rightarrow n$. Il n'en existe peut-être pas, mais comment le démontrer?

Les valeurs de la fonction $n \rightarrow s(n)$ sont relativement faciles à calculer quand on connaît une décomposition de n en produit de facteurs premiers (voir l'encadré 2). Cependant, et c'est bien là le problème, si certains grands nombres se factorisent aisément, par exemple ceux de la forme 2^k , d'autres sont extrêmement difficiles à factoriser et aujourd'hui on ne connaît pas de méthode permettant de factoriser facilement n'importe quel nombre composé de 200 chiffres.

QUE SE PASSE-T-IL QUAND ON RECOMMENCE ?

Finalement, vient à l'esprit la question suivante: partant d'un entier n , que se passe-t-il quand on calcule $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$ et que l'on poursuit autant que possible?

Les suites obtenues sont dénommées «suites aliquotes». Elles sont l'objet d'un travail acharné de calculs et d'études mathématiques. La communauté qui s'y intéresse mobilise des capacités >