

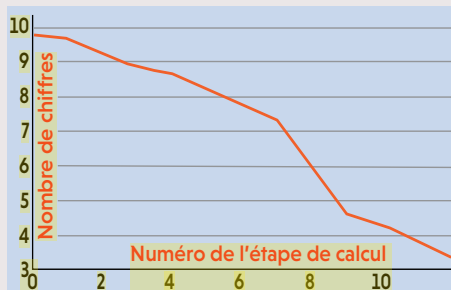
3

LES SUITES ALIQUOTES

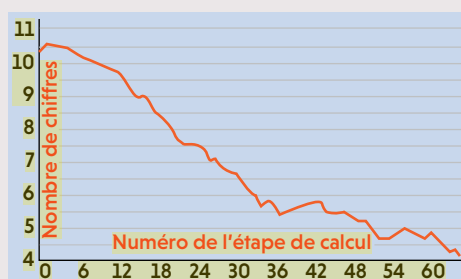
Beaucoup de suites aliquotes $n, s(n), s(s(n)), s(s(s(n))), \dots$ aboutissent à un nombre premier qui donne alors 1, puis 0. D'autres conduisent à un nombre parfait, ou à un nombre appartenant à une paire amiable ou à une chaîne sociable, et restent donc bornées. La question de savoir s'il existe des suites aliquotes tendant vers l'infini reste aujourd'hui non résolue, malgré les efforts considérables investis.

La conjecture de Catalan affirme qu'il n'existe aucune suite aliquote (infinie) non bornée. Plusieurs résultats théoriques suggèrent qu'elle est juste, mais d'autres semblent favoriser la conclusion inverse (voir le texte principal). Voici trois exemples de suites aliquotes bornées, suivies de trois exemples de suites aliquotes dont le statut reste inconnu et qui pourraient donc être non bornées et invalider la conjecture de Catalan. Pour les trois dernières suites le calcul s'arrête parce qu'on rencontre un entier qu'on ne parvient pas, aujourd'hui, à factoriser.

A. $n = 555\ 555\ 555$. La suite aliquote décroît sans à-coups, jusqu'à arriver au nombre premier 233, qui donne 1 puis 0.



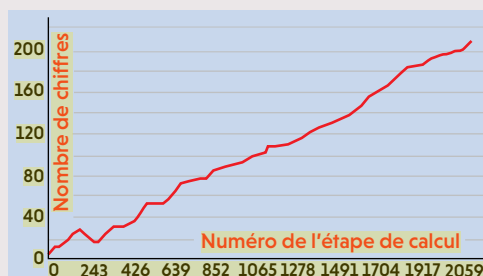
B. $n = 1\ 960\ 000\ 000$. La suite décroît moins régulièrement que la première, mais finit par arriver au nombre premier 1 093.



C. $n = 123\ 456$. La suite est hésitante, puis arrive à un point où elle chute brutalement vers le nombre premier 113.



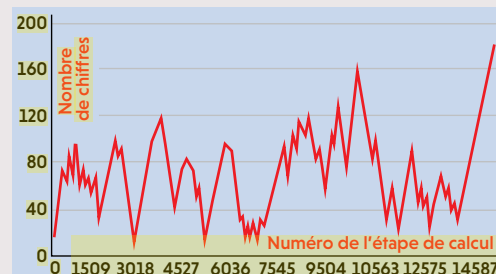
D. $n = 276$. La suite semble vouloir monter régulièrement. On doit arrêter le calcul, car on tombe sur un facteur de 205 chiffres qui bloque le calcul. L'entier 276 est le plus petit entier conduisant à un tel blocage.



E. $n = 19\ 560$. La suite semble extrêmement régulière et croissante jusqu'au blocage du calcul à cause d'un facteur de 203 chiffres. On imagine que, plus loin, elle continuera à monter à la même vitesse et donc ne sera pas bornée, ce qui contredira la conjecture de Catalan. Mais il manque la démonstration !



F. $n = 2\ 005\ 020$. Ce cas illustre à quel point une suite aliquote peut avoir un comportement irrégulier avant de sortir de la zone où les calculs sont possibles (ici, à cause d'un facteur de 180 chiffres). On a pu calculer 15 072 termes de la suite avant d'arriver à un facteur trop grand qui bloque le calcul. Le fichier de calcul associé à cette suite fait 845 pages !



Vérifiez les calculs ou faites-en d'autres en demandant (pour A) :

<http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=555555555&action=all&fr=0&to=100>

SUR LE WEB

Point de rencontre pour les passionnés des questions traitées dans l'article : www.mersenneforum.org

Site dédié aux suites aliquotes où tout le monde peut contribuer : <http://yafu.myfirewall.org/yafu/>

Pour suivre au jour le jour les calculs des séquences aliquotes : www.rechenkraft.net/aliquot/AllSeq.html

Site, riche en informations, d'un groupe français (Jean-Luc Garambois, Cédric Barret, Olivier Huber, Matthieu Bachschmidt, Youssef Chtaibi, Francis Jamm) sur les suites aliquotes : www.aliquotes.com

> informatiques colossales, tant l'excitation curieuse qui l'anime est forte. Un étonnant groupe de passionnés français, qui inclut Jean-Luc Garambois, un professeur des écoles habitant dans l'Est de la France, et Paul Zimmermann, un chercheur de l'Inria à Nancy, s'attache depuis plus de quinze ans à comprendre ces suites, aussi bien en menant des calculs qu'en formulant des conjectures et parfois en démontrant des résultats mathématiques.

Que peut-il se passer quand on s'engage dans le calcul d'une suite aliquote $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$, ...? Voici les diverses éventualités.

SUITES ALIQUOTES: SIX CAS

Cas 1. Les nombres 1 et 0 n'ont pas de diviseur différent d'eux-mêmes et donc $s(0)=s(1)=0$. Le calcul des suites aliquotes à partir de 0 ou 1 s'arrête immédiatement.

Cas 2. Les nombres premiers p , par définition, n'ont que 1 comme partie aliquote. Ils donnent donc 1, puis 0: $p \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Cas 3. Certains nombres reviennent sur eux-mêmes après un cheminement plus ou moins long, car ils appartiennent à une chaîne sociable. Partant par exemple du nombre 12496, repéré par Poulet en 1918, on passe par 14288, puis 15472, 14536, 14264 qui redonne 12496.

Cette chaîne sociable d'ordre 5 produit une suite aliquote périodique et c'est aussi le cas pour les nombres parfaits et les nombres amiables:

$28 \rightarrow 28 \rightarrow 28 \rightarrow \dots$;

$220 \rightarrow 284 \rightarrow 220 \rightarrow 284 \rightarrow 220 \rightarrow 284 \rightarrow \dots$

Cas 4. La suite aliquote, après un parcours plus ou moins long, tombe sur un nombre premier qui donne 1, puis 0:

$75 \rightarrow 49 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Par exemple, la suite aliquote partant de 285612 compte 490 termes avant d'arriver au nombre premier 59, qui donne 1 puis 0. Vous pouvez le vérifier grâce au site internet:

<http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=285612&action=all>

Ce site affiche toutes les étapes avec, pour chaque nombre calculé, sa décomposition en facteurs premiers, ce qui lui prend environ 20 secondes.

Cas 5. La suite aliquote tombe à un moment sur un nombre appartenant à une chaîne sociable et se met donc à tourner en rond. Ainsi, le nombre 2856, après 29 étapes, tombe sur la seule chaîne sociable d'ordre 28 connue (voir: <http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=2856&action=all>).

Cas 6. Dernière éventualité, la suite aliquote continue indéfiniment sans repasser deux fois par le même nombre et tend donc vers l'infini.

Ce dernier cas n'a jamais été rencontré: certaines suites aliquotes semblent se poursuivre très longtemps, mais la difficulté de la factorisation, quand les nombres de la suite deviennent trop grands, fait que l'on ne peut poursuivre le calcul. Ces suites aux statuts indéterminés agacent les mathématiciens.

Parmi les nombres entiers inférieurs à 1000, on sait que tous, sauf peut-être cinq, donnent des suites aliquotes bornées (cas 1 à cas 5). En revanche, les suites aliquotes engendrées par 276, 552, 564, 660, 966 ont un statut inconnu. Elles correspondent peut-être au cas 6. Ces cinq nombres sont dénommés les «cinq de Lehmer» en mémoire du mathématicien américain Derrick Lehmer, mort en 1991, qui découvrit leur statut particulier. Pour 276, on a calculé

4

LE GRAPHE MYSTÉRIEUX

À la fonction $n \rightarrow s(n)$ (la somme des parties aliquotes de n), on associe un graphe infini. Les nœuds en sont les entiers, et il y a un arc reliant n à $s(n)$ pour chaque entier n (une partie de graphe est représentée ci-contre). Voyons quelques questions sur lesquelles on travaille aujourd'hui.

1. Certains entiers n sont l'extrémité d'un arc et s'écrivent $n = s(m)$ pour un certain entier m . On les qualifie d'« atteignables » ; les autres sont dits inatteignables.

En admettant vraie la conjecture de Goldbach, la proportion des nombres impairs non atteignables est nulle à l'infini. Pour les

nombres pairs, Paul Erdős a prouvé en 1973 que les nombres pairs inatteignables représentent, à l'infini, une proportion strictement positive des nombres pairs.

En 2015, Florian Luca et Carl Pomerance ont prouvé que les nombres pairs atteignables représentent aussi une proportion strictement positive des nombres pairs.

2. De même que, partant de n , on peut étudier la suite aliquote $n, s(n), s(s(n)), \dots$, il est intéressant de savoir ce qui se passe si on inverse la recherche : partant de n , on recherche n_1 tel que $s(n_1) = n$, puis on recherche n_2 tel que $n_1 = s(n_2)$, etc. Cela revient à

suivre les flèches du graphe dans le sens opposé des flèches. Cette recherche est bloquée quand on arrive à un nombre inatteignable. La question la plus simple à ce sujet est : existe-t-il des entiers permettant de poursuivre indéfiniment ce chemin à reculons ? Il est très probable que oui.

3. Le graphe comporte plusieurs composantes connexes (parties non reliées au reste du graphe). On en connaît certaines, mais sont-elles en nombre infini ? Toute structure possible de graphes finis se trouve-t-elle quelque part dans le graphe aliquote ? Jean-Luc Garambois conjecture que oui.

