

2122 termes de la suite aliquote. On reste coincé car, quand on arrive au terme 2122, on doit factoriser un nombre de 211 chiffres pour calculer le nombre suivant (voir l'encadré 3). On a bien trouvé les facteurs premiers 2, 3, 3, 7, 19, 709 de ce nombre, mais le facteur restant est un entier de 205 chiffres que l'on n'arrive pour l'instant pas à factoriser. Essayez :

<http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=276&action=all>

La suite aliquote la plus longue connue est celle dont le point de départ est 2005020. Elle comporte 15072 termes connus.

La suite aliquote ayant pour point de départ 2340 est remarquable, car elle conduit au bout de 790 étapes à un nombre de 216 chiffres dont l'un des facteurs comporte 201 chiffres et que l'on n'a pas réussi à factoriser à ce jour.

## DEUX CONJECTURES CONTRADICTOIRES

Le mathématicien franco-belge Eugène Catalan a conjecturé en 1888 que toutes les suites aliquotes étaient bornées, se terminant par 0 ou par un cycle. Un argument assez fort en faveur de cette conjecture est la démonstration que la moyenne des  $s(n)/n$  tend vers  $\pi^2/6 - 1 = 0,644934...$  quand  $n$  tend vers l'infini. En effet, ce résultat signifie que  $s(n)$  est, le plus souvent, inférieur à  $n$ . Si on assimile les nombres d'une suite aliquote à des nombres tirés au hasard parmi les entiers en suivant la règle que la moyenne de  $s(n)/n$  tend vers 0,644934..., alors nécessairement ils restent bornés. Cependant, c'est là un argument incomplet, car les éléments d'une suite aliquotes ne sont pas tirés au hasard ! On parle d'argument heuristique pour de telles conclusions fondées sur un résultat rigoureux, mais qui concernent seulement un modèle imparfait de ce qui se produit.

D'ailleurs, une autre conjecture a été proposée vers 1975 par le Britannique Richard Guy et l'Américain John Selfridge. Elle stipule que sauf pour une proportion nulle de nombres impairs  $n$ , la suite aliquote de  $n$  est bornée, et que sauf pour une proportion nulle de nombres pairs  $n$ , la suite aliquote de  $n$  tend vers l'infini.

La raison d'introduire une distinction entre  $n$  pair et  $n$  impair est que quand on passe de  $n$  à  $s(n)$ , la parité se conserve, sauf si  $n$  est un carré ou le double d'un carré. Comme cette éventualité est de plus en plus rare quand  $n$  devient grand, en pratique les changements de parité finissent par ne plus se produire et il faut donc raisonner en séparant les nombres pairs et les nombres impairs.

On sait établir que quand  $n$  est pair, la moyenne des nombres  $s(n)/n$  tend vers  $5\pi^2/24 - 1 = 1,056147...$ , ce qui signifie que, en gros,  $s(n)$  est supérieur à  $n$ . Et on sait aussi

prouver que quand  $n$  est impair, la moyenne des nombres  $s(n)/n$  tend vers  $3\pi^2/24 - 1 = 0,233700...$ , ce qui signifie qu'en gros  $s(n)$  est de plus en plus petit. Tout cela produit un argument fort en faveur de la conjecture de Guy et Selfridge.

## CROISSANCE RÉPÉTÉE

Une autre piste consiste simplement à tenter la construction explicite d'un entier dont on démontrerait qu'il engendre une suite aliquote tendant vers l'infini. Erdős a publié en 1976 une preuve, due au Néerlandais Hendrik Lenstra, que pour tout entier positif  $k$ , il existe des suites aliquotes croissantes pendant  $k$  étapes successives.

De son côté, Jean-Luc Garambois a formulé la conjecture que, pour tout  $k$  et pour tout  $C$  positif, il existe des entiers  $n$  tels que la suite aliquote partant de  $n$  est croissante d'un facteur  $C$  au moins à chaque étape,  $s(n) \geq Cn$ , et cela pendant  $k$  étapes au moins. Mieux : Razvan Barbulescu, qui est aujourd'hui à Sorbonne Université, a réussi en 2012 à démontrer la conjecture, ce qui en fait un théorème.

Puisqu'une suite aliquote monte parfois très vite et très longtemps, il ne serait pas surprenant qu'il existe des suites montant indéfiniment et donc correspondant au cas 6. Cela semble presque aller de soi quand on observe les représentations graphiques de certaines suites aliquotes (voir l'encadré 3, schéma E), mais en mathématiques, il ne suffit pas de voir et d'être persuadé soi-même, il faut démontrer !

Jean-Luc Garambois propose aussi sur son site un entier  $n$  tel que la suite aliquote partant de  $n$  est croissante pendant des millions d'étapes, chacun de ses 800 premiers termes ayant plus de 40 millions de chiffres (voir [www.aliquotes.com/suite\\_termes\\_taille\\_record.html](http://www.aliquotes.com/suite_termes_taille_record.html)).

Les idées envisagées pour tenter de construire des suites aliquotes dont on démontrerait qu'elles sont indéfiniment croissantes deviennent de plus en plus précises ; le mystère du cas 6 est peut-être en passe d'être résolu. Si c'était en partant d'idées proposées par un amateur passionné, ce serait remarquable.

D'autres questions concernant les antécédents aliquotes, les nombres inatteignables, la structure du graphe général des suites aliquotes se posent et sont très sérieusement étudiées. Elles associent, comme pour le travail sur la conjecture de Catalan, raisonnements mathématiques experts et calculs informatiques.

Si vous ne savez pas quoi faire de la puissance de votre ordinateur, rejoignez la famille des passionnées de ces problèmes et mettez votre machine au service d'une de ces questions résolument mystérieuses sur lesquelles l'humanité se penche depuis plus de deux millénaires. ■

## BIBLIOGRAPHIE

C. Pomerance, **The Aliquot constant, after Bosma and Kane**, *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 69(3), pp. 915-930, 2018.

K. Chum et al., **Numerical and statistical analysis of aliquot sequences**, *Experimental Mathematics*, en ligne le 18 juin 2018.

A. Booker, **Finite connected components of the aliquot graph**, *Mathematics of Computation*, vol. 87, pp. 2891-2902, 2018.

W. Bosma et B. Kane, **The Aliquot constant**, *Quart. J. Math.*, vol. 63, pp. 309-323, 2012.

F. Luca et C. Pomerance, **The range of the sum-of-proper-divisors function**, *Acta Arithmetica*, vol. 168, pp. 187-199, 2015.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN  
rédacteur en chef adjoint  
à Pour la Science

# LA BALEINE BLEUE CHERCHE ENCORE DE L'EAU

