

R

ENDEZ-VOUS

P.78 Logique & calcul
P.84 Idées de physique
P.88 Chroniques de l'évolution
P.92 Science & gastronomie
P.94 À picorer

LES MATHS AU PÉRIL DE LA CONTRADICTION

Risque-t-on de trouver au cœur des mathématiques une contradiction qui obligerait à tout revoir? Telle était la crainte de l'éminent mathématicien américain Edward Nelson.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En 2006, Edward Nelson, qui était professeur au département de mathématiques de l'université de Princeton, aux États-Unis, fit circuler le texte d'une conférence intitulée « Warning signs of a possible collapse of contemporary mathematics » (« Signes inquiétants d'un effondrement possible des mathématiques contemporaines »). Il y indiquait trois points qui le persuadaient qu'un problème grave allait survenir au cœur de la reine des sciences.

Voyons le premier. Certaines contradictions trouvées en théorie des ensembles au début du xx^e siècle avaient été éliminées par une axiomatisation artificielle qui empêche, par exemple, de considérer l'ensemble de tous les ensembles. Cette solution axiomatique joue son rôle : la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZFC), la forme encore aujourd'hui en vigueur de cette « réparation », n'engendre pas la moindre contradiction, semble-t-il. La théorie ZFC n'est cependant pas celle de Georg Cantor et de Gottlob Frege, qui avaient découvert la théorie des ensembles, ce cadre puissant permettant l'épanouissement des mathématiques modernes. Pour Nelson, cette impossibilité d'exprimer l'intuition initiale des ensembles était une première alarme.

Son deuxième sujet d'inquiétude était le second théorème d'incomplétude de Gödel, selon lequel une théorie ne peut pas prouver sa propre non-contradiction... On ne peut ainsi pas prouver la non-contradiction des théories mathématiques de base, comme l'arithmétique,

et cela suggérerait que ces théories sont contradictoires.

Le troisième indice de l'imminence d'une catastrophe en mathématiques était que nos théories permettent trop aisément de créer des nombres entiers tellement grands qu'ils n'ont plus aucun sens, et cela en particulier à cause de l'opération d'exponentiation, dont Nelson montrait qu'elle introduit des difficultés qu'il n'y a pas si l'on n'utilise que l'addition et la multiplication.

Nelson était un mathématicien éminent et respecté, qui a travaillé sur des sujets variés dont la théorie du mouvement brownien et les fondements des probabilités. Son inquiétude, même si elle a étonné, a jeté un trouble.

La situation s'est aggravée quand Nelson a publié en 2011 la première version d'un livre intitulé *Elements*, démarrant par : « Le but de ce travail est de prouver que les mathématiques contemporaines, en particulier l'arithmétique de Peano, sont contradictoires, puis de poser des fondations solides pour les mathématiques, et de commencer à bâtir sur ces fondations. »

L'ARITHMÉTIQUE, CONTRADICTOIRE?

Une théorie est contradictoire si elle permet, pour un énoncé E , de démontrer à la fois E et sa négation $\text{non-}E$. S'il y a une seule contradiction (E et $\text{non-}E$) dans une théorie, alors tous les énoncés qui ont un sens dans la théorie sont démontrables (voir l'encadré 4). Lorsqu'une théorie mathématique est contradictoire, tout y est à la fois faux et vrai : elle n'a donc aucun intérêt !

L'arithmétique de Peano auquel se référait Nelson est une théorie axiomatique des nombres entiers. Parmi ses axiomes, il y a celui du raisonnement par récurrence qui affirme : *Si une propriété $P(n)$ est vraie pour l'entier 0, et si, pour tout entier n , $P(n)$ entraîne $P(n+1)$, alors pour tout entier n , $P(n)$ est vraie.*

L'arithmétique de Peano démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers. Elle permet aussi d'établir indirectement tout ce que l'on considère comme vrai des ensembles finis, par exemple que l'ensemble des parties d'un ensemble de n éléments contient 2^n éléments. L'arithmétique de Peano est l'outil de base pour développer toutes les mathématiques des structures finies.

La plupart des théories mathématiques permettent de répliquer les raisonnements de l'arithmétique de Peano, un noyau commun aux théories mathématiques. Trouver une contradiction dans l'arithmétique de Peano entraînerait qu'il n'existe pas de vérité mathématique !

OUF, NELSON S'EST TROMPÉ

La démonstration avancée par Nelson qu'il existe une contradiction dans l'arithmétique élémentaire est subtile et loin d'être élémentaire. Il utilise la notion de complexité de Kolmogorov, ainsi qu'une preuve du second théorème d'incomplétude de Gödel, proposée en 2010 par Shira Kritchman et Ran Raz.

Mais la démonstration de Nelson ne tient pas. Il n'a pas vraiment trouvé d'énoncé mathématique E telle que l'arithmétique élémentaire prouve à la fois E et non E . Examinée par divers mathématiciens dont le célèbre Terence Tao, détenteur de la médaille Fields, un point douteux de la démonstration de Nelson a été rapidement identifié. Il s'est révélé impossible à corriger. Nelson en a convenu. Temporairement, puisqu'en 2013, il proposa une nouvelle version de sa preuve... qui, heureusement, était de nouveau insatisfaisante, ce qu'il a de nouveau reconnu. Nelson a bien repris son travail, mais il est décédé en 2014, apparemment sans aboutir.

«IL Y A JUSTE UN POINT OÙ J'AI RENCONTRÉ UNE DIFFICULTÉ»

L'ambition de Nelson de trouver une contradiction grave était-elle déraisonnable ? A-t-on déjà connu des situations où, tout à coup, au détour d'un raisonnement, on découvre qu'on vient de prouver la négation, non- E , d'un énoncé E qu'on avait démontré auparavant ?

Il se trouve que oui, et il est intéressant de revenir sur les moments où tout a vacillé. Aux $XVII^e$ et $XVIII^e$ siècles, quand le calcul infini-tésimal a été introduit, ses règles de calcul peu sûres permettaient de démontrer assez facilement que $0=1$! Aussi Michel Rolle et George Berkeley pensaient-ils qu'il fallait l'abandonner. Mais les choses se sont arrangées au XIX^e siècle. >

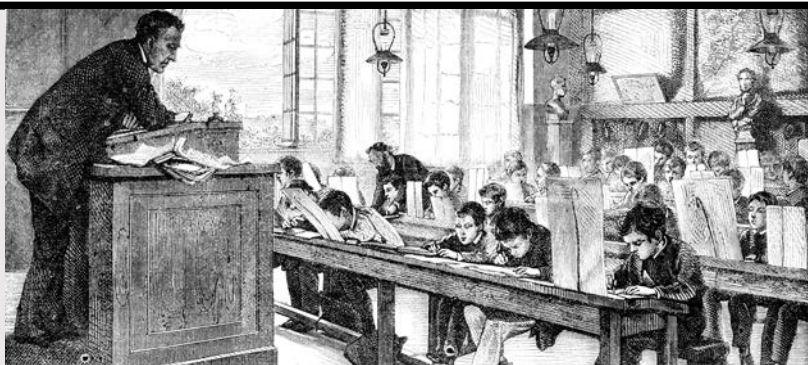
PARADOXES ET CONTRADICTIONS

1

Les mathématiciens s'intéressent aux paradoxes, car un paradoxe un peu modifié et transposé au sein d'une théorie peut devenir un outil de démonstration.

C'est le cas du paradoxe du menteur : si la phrase « Je mens » est vraie, alors ce que je dis en disant « Je mens » n'est pas vrai ; et si la phrase « Je mens » n'est pas vraie, alors je dis la vérité et la phrase « Je mens » est vraie. La version de cette phrase exprimée en théorie des nombres, « Je ne suis pas démontrable », est la clé du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel, qui affirme que dans toute théorie assez riche et non contradictoire, on peut formuler des énoncés dont elle n'est capable de démontrer ni la vérité, ni la fausseté.

En 2010, un paradoxe qui n'avait jusque-là pas servi en mathématiques a été utilisé par Shira Kritchman et Ran Raz pour donner une nouvelle démonstration du second théorème d'incomplétude



de Gödel, selon lequel si une théorie est non contradictoire et assez puissante, alors elle est incapable de démontrer sa non-contradiction. Rappelons ce paradoxe auquel on laissera le lecteur réfléchir.

Le maître dit à sa classe : « Vous aurez une interrogation surprise la semaine prochaine, donc l'un des six jours entre lundi et samedi. » Les élèves raisonnent alors de la façon suivante : « L'interrogation ne peut pas avoir lieu samedi, car ce ne serait pas une

interrogation surprise. Arrivés vendredi matin, nous saurons donc que l'interrogation va avoir lieu. Elle ne peut donc pas survenir vendredi. De même, de proche en proche, elle ne peut avoir lieu ni jeudi, ni mercredi, ni mardi, ni lundi. » Le professeur donne son interrogation le mardi, et personne ne s'y attendait ; il a donc bien respecté sa promesse. Il y a là une contradiction avec le raisonnement des élèves, qui semble pourtant parfaitement correct.