

2

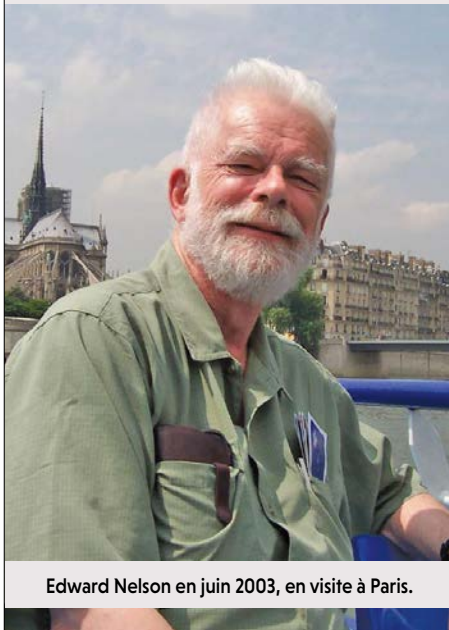
EDWARD NELSON,
L'ILLUSION DE L'INFINI DES NOMBRES

Edward Nelson (1932-2014) fut un mathématicien hors norme doté d'un esprit profond et original. Professeur à l'université de Princeton, il a travaillé en physique mathématique et proposa une version nouvelle de l'analyse non standard dénommée *Internal set theory*. En 2002, il expliquait comment il avait cessé de croire en l'existence des nombres (extrait de son texte *Mathematics and faith*) :

« Je dois raconter comment j'ai perdu ma foi en les nombres de Pythagore. Un matin de 1976, avant la réunion d'été de la Société américaine de mathématiques à Toronto, je me suis réveillé tôt. Tandis que je méditais sur les nombres, j'ai senti à un moment donné une présence accablante m'accusant d'arrogance, cela parce que je croyais en l'existence réelle d'un monde infini de nombres. Cela me laissa comme un bébé dans son berceau réduit à compter sur

ses doigts. Maintenant, je vis dans un monde où il n'y a pas de nombres, sauf ceux que les êtres humains construisent à l'occasion. La religion de Pythagore n'est plus pratiquée. Mais Pythagore a fortement influencé Platon, et nous-mêmes par son intermédiaire. Les nombres de Pythagore sont le type même des idées platoniciennes. [...] Sont-ils créés – contingents et sujets aux changements ? Sont-ils immuables et donc aujourd'hui comme ils l'étaient autrefois et pour toujours ? Ou s'agit-il de constructions de la pensée humaine qu'il est dangereux d'idolâtrer ? Pour nous autres hommes et femmes du monde de la recherche, réifier les idées abstraites, voire fonder la morale sur elles, est une tentation plus insidieuse et plus corruptrice que le serait le culte de statues de métal. »

Nelson défendait donc une conception prudente des mathématiques, qu'on nomme parfois formalisme : faire des mathématiques, c'est manipuler des symboles et des formules auxquels il ne faut pas accorder trop d'importance, et pour lesquels, surtout, il faut s'interdire d'imaginer qu'une réalité se cache derrière eux. La conception de Nelson le conduisit à penser que l'arithmétique élémentaire est contradictoire. Il passa la fin de sa vie à tenter de prouver que la théorie habituelle des nombres (l'axiomatique de Peano) ne tient pas debout. Il publia en 2011 une première version de sa démonstration, puis une seconde en 2013. Bien que très subtiles et menées avec soin, ces preuves se révélèrent incorrectes. Pour l'heure, personne n'a su trouver de contradiction dans la théorie des nombres, ni dans la théorie des ensembles telle qu'elle a été axiomatisée au début du xx^e siècle.



Edward Nelson en juin 2003, en visite à Paris.

> Le second exemple de contradiction considéré comme grave a déjà été évoqué : il concerne la théorie des ensembles. L'histoire est remarquable, car la contradiction est survenue brusquement. Gottlob Frege, qui venait de relire les épreuves d'un livre, reçoit une lettre aimable de Bertrand Russell datée du 16 juin 1902. Celui-ci exprime son accord avec la façon de procéder de Frege pour traiter la logique. Il ajoute cependant : « Il y a juste un point où j'ai rencontré une difficulté... », et lui présente le problème de l'ensemble E des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. E appartient-il à lui-même ? En langage symbolique : $E = \{F \text{ tel que } F \notin F\}$. Est-ce que $E \in E$?

Si E appartient à E , $E \in E$, alors E n'a pas la propriété caractéristique des éléments de E ; donc E n'est pas élément de E , $E \notin E$. On a une contradiction.

Si E n'appartient pas à lui-même, $E \notin E$, alors il a la propriété caractéristique des éléments de E ; il est donc un élément de E : $E \in E$. On a encore une contradiction.

Ainsi, chacune des deux éventualités, $E \in E$ ou $E \notin E$, conduit à une contradiction.

On découvrit d'autres contradictions, dont celle concernant l'ensemble U de tous les ensembles. Chacune des parties (ou sous-ensembles) de U est un ensemble, donc un élément de U . Par conséquent, U a au moins autant d'éléments qu'il a de parties. Sa taille est donc au moins aussi grande que celle de l'ensemble de ses parties, ce qui entre en contradiction avec le résultat, dû à Cantor, que l'ensemble des parties d'un ensemble E est toujours de taille strictement supérieure à celle de E .

THÉORIE DES ENSEMBLES RÉPARÉE

Les mathématiciens du début du xx^e siècle ont su formuler une version axiomatique de la théorie des ensembles qui évite les contradictions en interdisant de considérer l'ensemble de tous les ensembles comme un véritable ensemble et en formulant diverses limitations sur ce qu'on peut définir comme ensemble. La théorie est débarrassée des contradictions, non pas parce qu'on démontre qu'il n'y en a pas, mais simplement parce qu'aujourd'hui personne n'a su proposer, pour un énoncé précis A , un raisonnement conduisant à A et un autre conduisant à non- A . Le cadre restrictif de l'axiomatique de ZFC, qui déplaisait à Nelson par ses aspects artificiels, fonctionne en pratique.

Cette remise sur pied de la théorie y restreint la liberté, mais pas d'une manière gênante pour les mathématiciens : ils s'y sentent au large et s'en satisfont, à de rares exceptions près.

D'autres situations dans l'histoire récente des mathématiques ont conduit à découvrir des contradictions dans des théories dont on aurait aimé pouvoir se servir sans risque, ce que