

2

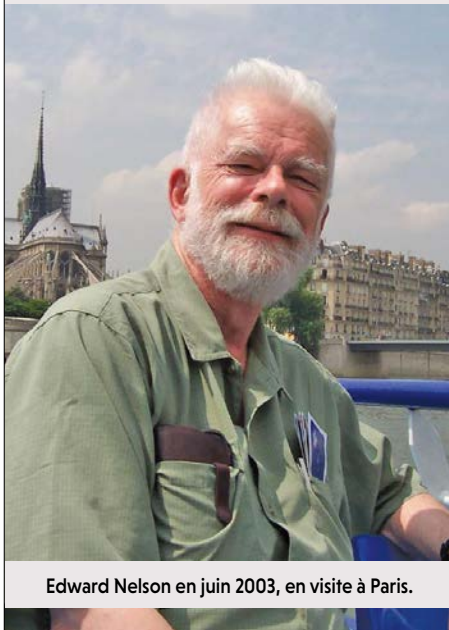
EDWARD NELSON,
L'ILLUSION DE L'INFINI DES NOMBRES

Edward Nelson (1932-2014) fut un mathématicien hors norme doté d'un esprit profond et original. Professeur à l'université de Princeton, il a travaillé en physique mathématique et proposa une version nouvelle de l'analyse non standard dénommée *Internal set theory*. En 2002, il expliquait comment il avait cessé de croire en l'existence des nombres (extrait de son texte *Mathematics and faith*) :

« Je dois raconter comment j'ai perdu ma foi en les nombres de Pythagore. Un matin de 1976, avant la réunion d'été de la Société américaine de mathématiques à Toronto, je me suis réveillé tôt. Tandis que je méditais sur les nombres, j'ai senti à un moment donné une présence accablante m'accusant d'arrogance, cela parce que je croyais en l'existence réelle d'un monde infini de nombres. Cela me laissa comme un bébé dans son berceau réduit à compter sur

ses doigts. Maintenant, je vis dans un monde où il n'y a pas de nombres, sauf ceux que les êtres humains construisent à l'occasion. La religion de Pythagore n'est plus pratiquée. Mais Pythagore a fortement influencé Platon, et nous-mêmes par son intermédiaire. Les nombres de Pythagore sont le type même des idées platoniciennes. [...] Sont-ils créés – contingents et sujets aux changements ? Sont-ils immuables et donc aujourd'hui comme ils l'étaient autrefois et pour toujours ? Ou s'agit-il de constructions de la pensée humaine qu'il est dangereux d'idolâtrer ? Pour nous autres hommes et femmes du monde de la recherche, réifier les idées abstraites, voire fonder la morale sur elles, est une tentation plus insidieuse et plus corruptrice que le serait le culte de statues de métal. »

Nelson défendait donc une conception prudente des mathématiques, qu'on nomme parfois formalisme : faire des mathématiques, c'est manipuler des symboles et des formules auxquels il ne faut pas accorder trop d'importance, et pour lesquels, surtout, il faut s'interdire d'imaginer qu'une réalité se cache derrière eux. La conception de Nelson le conduisit à penser que l'arithmétique élémentaire est contradictoire. Il passa la fin de sa vie à tenter de prouver que la théorie habituelle des nombres (l'axiomatique de Peano) ne tient pas debout. Il publia en 2011 une première version de sa démonstration, puis une seconde en 2013. Bien que très subtiles et menées avec soin, ces preuves se révélèrent incorrectes. Pour l'heure, personne n'a su trouver de contradiction dans la théorie des nombres, ni dans la théorie des ensembles telle qu'elle a été axiomatisée au début du xx^e siècle.



Edward Nelson en juin 2003, en visite à Paris.

> Le second exemple de contradiction considéré comme grave a déjà été évoqué : il concerne la théorie des ensembles. L'histoire est remarquable, car la contradiction est survenue brusquement. Gottlob Frege, qui venait de relire les épreuves d'un livre, reçoit une lettre aimable de Bertrand Russell datée du 16 juin 1902. Celui-ci exprime son accord avec la façon de procéder de Frege pour traiter la logique. Il ajoute cependant : « Il y a juste un point où j'ai rencontré une difficulté... », et lui présente le problème de l'ensemble E des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. E appartient-il à lui-même ? En langage symbolique : $E = \{F \text{ tel que } F \notin F\}$. Est-ce que $E \in E$?

Si E appartient à E , $E \in E$, alors E n'a pas la propriété caractéristique des éléments de E ; donc E n'est pas élément de E , $E \notin E$. On a une contradiction.

Si E n'appartient pas à lui-même, $E \notin E$, alors il a la propriété caractéristique des éléments de E ; il est donc un élément de E : $E \in E$. On a encore une contradiction.

Ainsi, chacune des deux éventualités, $E \in E$ ou $E \notin E$, conduit à une contradiction.

On découvrit d'autres contradictions, dont celle concernant l'ensemble U de tous les ensembles. Chacune des parties (ou sous-ensembles) de U est un ensemble, donc un élément de U . Par conséquent, U a au moins autant d'éléments qu'il a de parties. Sa taille est donc au moins aussi grande que celle de l'ensemble de ses parties, ce qui entre en contradiction avec le résultat, dû à Cantor, que l'ensemble des parties d'un ensemble E est toujours de taille strictement supérieure à celle de E .

THÉORIE DES ENSEMBLES RÉPARÉE

Les mathématiciens du début du xx^e siècle ont su formuler une version axiomatique de la théorie des ensembles qui évite les contradictions en interdisant de considérer l'ensemble de tous les ensembles comme un véritable ensemble et en formulant diverses limitations sur ce qu'on peut définir comme ensemble. La théorie est débarrassée des contradictions, non pas parce qu'on démontre qu'il n'y en a pas, mais simplement parce qu'aujourd'hui personne n'a su proposer, pour un énoncé précis A , un raisonnement conduisant à A et un autre conduisant à non- A . Le cadre restrictif de l'axiomatique de ZFC, qui déplaisait à Nelson par ses aspects artificiels, fonctionne en pratique.

Cette remise sur pied de la théorie y restreint la liberté, mais pas d'une manière gênante pour les mathématiciens : ils s'y sentent au large et s'en satisfont, à de rares exceptions près.

D'autres situations dans l'histoire récente des mathématiques ont conduit à découvrir des contradictions dans des théories dont on aurait aimé pouvoir se servir sans risque, ce que

l'intuition qui leur donnait naissance laissait croire. Citons la logique combinatoire de Haskell Curry (1900-1982) et le lambda-calcul d'Alonzo Church (1903-1995), qui décrit un système de notations puissant pour les fonctions. Ces deux systèmes issus d'intuitions mathématiques, dont la fécondité et l'importance sont maintenant établies, conduisaient dans leur version initiale à des contradictions. C'est Stephen Kleene, un élève de Church (méfiez-vous de vos élèves...), qui découvrit en 1934, avec John Rosser, le pot aux roses. De nouveau, comme pour la théorie des ensembles, une légère restriction dans les systèmes a permis de les corriger et d'éviter, jusqu'à présent, qu'ils ne donnent des contradictions.

AJUSTEMENTS SUCCESSIFS

Un autre cas est celui du système logique de la «théorie constructive des types», devenu important en informatique, car il évite les situations où l'on prouve l'existence d'objets ayant une certaine propriété alors qu'on ne sait construire explicitement aucun objet ayant la propriété considérée. La première version de cette théorie, proposée en 1972 par le Suédois Per Martin-Löf, s'est révélée contradictoire,

obligeant là encore à corriger ce que l'intuition avait imaginé tenir debout.

Citons un dernier cas concernant les axiomes dits de «grands cardinaux», qui affirment l'existence d'ensembles très grands. Une multitude de principes ont été utilisés pour en définir, et il est admis que tout ce qui affirme que le monde mathématique est vaste doit être accepté: l'axiome de l'infini stipulant qu'il existe des ensembles infinis est le premier de cette catégorie. L'Américain Kenneth Kunen a cependant démontré en 1971 que ce maximalisme ensembliste n'est pas raisonnable au-delà d'un certain point, car certains axiomes de grands cardinaux, bien qu'aussi acceptables en apparence que d'autres, conduisent à une contradiction (en fait à une incompatibilité avec l'axiome du choix). Sans cette découverte, on aurait pu adopter une théorie des ensembles contradictoire.

Il faut noter que les cas que nous avons cités appartiennent tous à la même catégorie: on tente de formuler avec précision une théorie récente en cours d'élaboration en fixant ses axiomes; on la fait fonctionner; on découvre une contradiction; on ajuste; la contradiction disparaît.

>

DES INTUITIONS CONVERGENT ET SE RENFORCENT

3

Le second théorème d'incomplétude de Gödel indique que si un système non contradictoire est assez puissant pour mener les raisonnements arithmétiques habituels, alors ce système ne peut pas démontrer qu'il est non contradictoire.

Cela mit fin au projet de justifier l'usage de l'infini (comme la théorie des ensembles le permet) à l'aide d'une théorie qui ne l'utilise pas, ce qui était l'idée du programme de David Hilbert. Ce grand mathématicien souhaitait renforcer la confiance en l'usage de «l'infini actuel» (qui existe pleinement, maintenant) par opposition à «l'infini potentiel» (qui se construit petit à petit).

L'usage de l'infini actuel était devenu courant alors que les philosophes ont longtemps considéré qu'il fallait s'en méfier, et même le réserver à Dieu qui seul pouvait le comprendre. Hilbert rêvait de passer de la croyance très largement partagée que la théorie des nombres (sans infini actuel) est sans contradiction à l'affirmation que des théories plus fortes, telle la théorie des ensembles (avec infini actuel), le sont aussi. Le second théorème de Gödel montre que c'est impossible: une théorie ne pouvant justifier d'elle-même qu'elle est non contradictoire, elle ne peut *a fortiori* pas justifier la non-contradiction d'une théorie plus forte qu'elle.

Il faut cependant faire deux remarques. D'abord, qu'une théorie puisse démontrer sa propre non-contradiction n'est pas utile: une théorie contradictoire démontre tout ce qu'on veut, et donc aussi sa non-contradiction! De plus, si on peut démontrer qu'une théorie *S* fondée sur des axiomes très généraux et puissants (c'est le cas de l'arithmétique de

Peano) est non contradictoire en n'utilisant qu'une faible partie de ce que permet *S* et un autre principe de raisonnement s'appuyant sur l'intuition, on gagne quelque chose. C'est le cas de la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique par Gerhard Gentzen en 1936: elle met en œuvre un principe de raisonnement par récurrence un peu plus général que celui de l'arithmétique de Peano, mais est assez simple quand même. D'autres preuves de la non-contradiction de l'arithmétique ont aussi été formulées en se fondant sur des théories qui ne sont pas strictement plus faibles que celle de Peano (c'est impossible!), mais en ne mettant en action qu'un nombre limité de principes ou en n'utilisant que des concepts assez différents de ceux à la base de l'arithmétique de Peano.

On doit voir ces démonstrations comme des raisons cumulatives de croire que cette arithmétique est non contradictoire. Plusieurs cheminements de pensée, plusieurs bases différentes de concepts concourent à la conclusion que l'arithmétique de Peano n'est pas contradictoire; on doit en être rassuré.

Aujourd'hui, les fondements proposés par Vladimir Voevodsky ne permettent pas plus que les fondements ensemblistes habituels utilisant l'axiomatique ZFC d'être certain que notre façon de développer les mathématiques ne conduira pas à des contradictions; mais en adossant ces formalismes à d'autres intuitions de nature plus topologique, on renforce les raisons que nous avons de croire que les mathématiques n'aboutiront jamais à des contradictions.



Kurt Gödel (1906-1978)