

l'intuition qui leur donnait naissance laissait croire. Citons la logique combinatoire de Haskell Curry (1900-1982) et le lambda-calcul d'Alonzo Church (1903-1995), qui décrit un système de notations puissant pour les fonctions. Ces deux systèmes issus d'intuitions mathématiques, dont la fécondité et l'importance sont maintenant établies, conduisaient dans leur version initiale à des contradictions. C'est Stephen Kleene, un élève de Church (méfiez-vous de vos élèves...), qui découvrit en 1934, avec John Rosser, le pot aux roses. De nouveau, comme pour la théorie des ensembles, une légère restriction dans les systèmes a permis de les corriger et d'éviter, jusqu'à présent, qu'ils ne donnent des contradictions.

AJUSTEMENTS SUCCESSIFS

Un autre cas est celui du système logique de la «théorie constructive des types», devenu important en informatique, car il évite les situations où l'on prouve l'existence d'objets ayant une certaine propriété alors qu'on ne sait construire explicitement aucun objet ayant la propriété considérée. La première version de cette théorie, proposée en 1972 par le Suédois Per Martin-Löf, s'est révélée contradictoire,

obligeant là encore à corriger ce que l'intuition avait imaginé tenir debout.

Citons un dernier cas concernant les axiomes dits de «grands cardinaux», qui affirment l'existence d'ensembles très grands. Une multitude de principes ont été utilisés pour en définir, et il est admis que tout ce qui affirme que le monde mathématique est vaste doit être accepté: l'axiome de l'infini stipulant qu'il existe des ensembles infinis est le premier de cette catégorie. L'Américain Kenneth Kunen a cependant démontré en 1971 que ce maximalisme ensembliste n'est pas raisonnable au-delà d'un certain point, car certains axiomes de grands cardinaux, bien qu'aussi acceptables en apparence que d'autres, conduisent à une contradiction (en fait à une incompatibilité avec l'axiome du choix). Sans cette découverte, on aurait pu adopter une théorie des ensembles contradictoire.

Il faut noter que les cas que nous avons cités appartiennent tous à la même catégorie: on tente de formuler avec précision une théorie récente en cours d'élaboration en fixant ses axiomes; on la fait fonctionner; on découvre une contradiction; on ajuste; la contradiction disparaît.



DES INTUITIONS CONVERGENT ET SE RENFORCENT

3

Le second théorème d'incomplétude de Gödel indique que si un système non contradictoire est assez puissant pour mener les raisonnements arithmétiques habituels, alors ce système ne peut pas démontrer qu'il est non contradictoire.

Cela mit fin au projet de justifier l'usage de l'infini (comme la théorie des ensembles le permet) à l'aide d'une théorie qui ne l'utilise pas, ce qui était l'idée du programme de David Hilbert. Ce grand mathématicien souhaitait renforcer la confiance en l'usage de « l'infini actuel » (qui existe pleinement, maintenant) par opposition à « l'infini potentiel » (qui se construit petit à petit).

L'usage de l'infini actuel était devenu courant alors que les philosophes ont longtemps considéré qu'il fallait s'en méfier, et même le réserver à Dieu qui seul pouvait le comprendre. Hilbert rêvait de passer de la croyance très largement partagée que la théorie des nombres (sans infini actuel) est sans contradiction à l'affirmation que des théories plus fortes, telle la théorie des ensembles (avec infini actuel), le sont aussi. Le second théorème de Gödel montre que c'est impossible : une théorie ne pouvant justifier d'elle-même qu'elle est non contradictoire, elle ne peut *a fortiori* pas justifier la non-contradiction d'une théorie plus forte qu'elle.

Il faut cependant faire deux remarques. D'abord, qu'une théorie puisse démontrer sa propre non-contradiction n'est pas utile : une théorie contradictoire démontre tout ce qu'on veut, et donc aussi sa non-contradiction ! De plus, si on peut démontrer qu'une théorie *S* fondée sur des axiomes très généraux et puissants (c'est le cas de l'arithmétique de

Peano) est non contradictoire en n'utilisant qu'une faible partie de ce que permet *S* et un autre principe de raisonnement s'appuyant sur l'intuition, on gagne quelque chose. C'est le cas de la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique par Gerhard Gentzen en 1936 : elle met en œuvre un principe de raisonnement par récurrence un peu plus général que celui de l'arithmétique de Peano, mais est assez simple quand même. D'autres preuves de la non-contradiction de l'arithmétique ont aussi été formulées en se fondant sur des théories qui ne sont pas strictement plus faibles que celle de Peano (c'est impossible !), mais en ne mettant en action qu'un nombre limité de principes ou en n'utilisant que des concepts assez différents de ceux à la base de l'arithmétique de Peano.

On doit voir ces démonstrations comme des raisons cumulatives de croire que cette arithmétique est non contradictoire. Plusieurs cheminements de pensée, plusieurs bases différentes de concepts concourent à la conclusion que l'arithmétique de Peano n'est pas contradictoire ; on doit en être rassuré.

Aujourd'hui, les fondements proposés par Vladimir Voevodsky ne permettent pas plus que les fondements ensemblistes habituels utilisant l'axiomatique ZFC d'être certain que notre façon de développer les mathématiques ne conduira pas à des contradictions ; mais en adossant ces formalismes à d'autres intuitions de nature plus topologique, on renforce les raisons que nous avons de croire que les mathématiques n'aboutiront jamais à des contradictions.



Kurt Gödel (1906-1978)

➤ On peut donc défendre que ces systèmes contradictoires sont apparus à propos d'idées que l'on n'avait pas encore bien testées, systèmes dont on n'a pas su mesurer immédiatement qu'ils étaient si puissants qu'ils donnaient des contradictions. En revanche, jamais une théorie bien installée, comme l'arithmétique de Peano, ne s'est trouvée dans cette situation.

Doit-on penser comme Nelson que cela n'est dû qu'à notre exploration insuffisante des systèmes que nous utilisons, et que si nous n'y prenons pas garde ils finiront par s'écrouler? Ou au contraire, doit-on, comme beaucoup de mathématiciens le soutiennent, affirmer que s'il y avait une contradiction possible dans les systèmes utilisés depuis longtemps, elle serait apparue, et donc que leur absence doit nous rassurer?

LA FÉCONDE INQUIÉTUDE DE VLADIMIR VOEVOVSKY

Un autre mathématicien prestigieux et détenteur de la médaille Fields, le Russe Vladimir Voevodsky (1966-2017), a craint aussi que les mathématiques ne soient pas assez bien protégées de la contradiction et de l'erreur. Il a par ailleurs défendu l'idée qu'il est devenu nécessaire de pratiquer les mathématiques d'une nouvelle façon.

Voevodsky était inquiet car son domaine de recherche, la géométrie algébrique, oblige à des démonstrations très longues et complexes, au point que plusieurs fois des erreurs se sont glissées dans des démonstrations et sont passées inaperçues durant des années. Lui-même a découvert, en retravaillant sur l'un de ses anciens articles, qu'il avait proposé une démonstration fautive. Après un gros travail, il a su

remettre sa preuve sur pied. Le plus inquiétant à propos de cette erreur est que plusieurs groupes de mathématiciens avaient travaillé en commun sur l'article erroné sans y repérer d'erreur. Il mentionna aussi le cas d'un article de son domaine où les chercheurs ont été obligés de remplacer un paragraphe faux de quelques lignes par trente pages, issues d'un effort des spécialistes s'étalant sur plus de cinq ans.

Voevodsky en était arrivé à la conclusion que dans sa spécialité, le système habituel de validation des démonstrations par les autres chercheurs du domaine n'était plus suffisant pour garantir la correction des travaux. Il écrivit: «Pour mener mon travail avec un niveau de rigueur et de précision que je pensais nécessaire, il aurait fallu un énorme effort de ma part et cela n'aurait produit que des textes très difficiles à lire. De plus, qui serait vraiment en mesure d'assurer que je n'ai rien oublié et que je n'ai laissé aucune erreur, puisque des erreurs relativement simples attendent des années avant d'être découvertes? Je pense que c'est à ce moment que j'ai arrêté de faire ce que j'appellais de la recherche conduite par la curiosité, et que je me suis mis à penser sérieusement au futur. Je n'avais pas les outils pour explorer ce vers quoi ma curiosité m'entraînait et que je considérais comme ayant de l'intérêt, de la valeur et de la beauté.»

Ses doutes sur la non-contradiction des théories habituelles, associés à son expérience avec les erreurs impossibles à maîtriser de son domaine de recherche, le conduisirent à imaginer une façon nouvelle d'écrire et de pratiquer les mathématiques. Pour reprendre le contrôle et assurer la rigueur des travaux mathématiques de son domaine, Voevodsky jugea indispensable que chaque point du développement d'une

LA CONTRADICTION UTILE : LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

4

Les mathématiciens évitent à tout prix les contradictions, sauf quand ils en utilisent la présence temporaire dans ce qu'on dénomme les « démonstrations par l'absurde ».

Rappelons-en le principe.

Pour prouver une affirmation A, on commence par faire l'hypothèse inverse, non-A. On mène alors un raisonnement jusqu'à arriver à une contradiction, par exemple en démontrant A (le contraire de l'hypothèse faite). Le fait d'avoir obtenu une absurdité ne peut signifier qu'une chose : l'hypothèse initiale du raisonnement est fautive. Par conséquent, non-A est faux, donc A est vrai.

Par exemple, démontrons par cette méthode que « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Supposons le contraire, c'est-à-dire que « 36 est une puissance de 2 », donc que 36 est de la forme 2^n pour un certain entier n. En divisant par 2 chaque côté de l'égalité $36 = 2^n$, on obtient : $18 = 2^{n-1}$. On recommence : $9 = 2^{n-2}$. Nécessairement, $n - 2 \geq 1$, donc $9 = 2 \times 2^{n-3}$, où 2^{n-3} est un entier. Donc 9 est pair. C'est absurde.

On en tire la conclusion : « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Le raisonnement par l'absurde est très important en mathématiques. C'est par exemple lui que Georg Cantor a utilisé pour montrer que l'infini des nombres réels est strictement plus grand que l'infini des nombres entiers.

Le principe du raisonnement par l'absurde correspond à la formule logique :

$$(\text{non-A} \Rightarrow (\text{B et non-B})) \Rightarrow \text{A}$$

La crainte de la contradiction en mathématiques provient de la règle logique *ex falso quodlibet* : (B et non-B) $\Rightarrow$ A. Elle signifie que dès qu'une seule contradiction est obtenue, tout est vrai.

On peut démontrer la règle *ex falso quodlibet* de plusieurs façons, mais le raisonnement par l'absurde constitue la plus simple : Si on a (B et non-B), alors on a aussi (non-A) $\Rightarrow$ (B et non-B) (car, quand X est vrai, on a $Y \Rightarrow X$ pour tout Y). Donc, d'après la règle du raisonnement par l'absurde, A est vrai. On a ainsi établi que partant de (B et non-B), on obtenait A ; autrement dit, on a établi la règle *ex falso quodlibet*.