

- > On peut donc défendre que ces systèmes contradictoires sont apparus à propos d'idées que l'on n'avait pas encore bien testées, systèmes dont on n'a pas su mesurer immédiatement qu'ils étaient si puissants qu'ils donnaient des contradictions. En revanche, jamais une théorie bien installée, comme l'arithmétique de Peano, ne s'est trouvée dans cette situation.

Doit-on penser comme Nelson que cela n'est dû qu'à notre exploration insuffisante des systèmes que nous utilisons, et que si nous n'y prenons pas garde ils finiront par s'écrouler? Ou au contraire, doit-on, comme beaucoup de mathématiciens le soutiennent, affirmer que s'il y avait une contradiction possible dans les systèmes utilisés depuis longtemps, elle serait apparue, et donc que leur absence doit nous rassurer?

LA FÉCONDE INQUIÉTUDE DE VLADIMIR VOEVOVSKY

Un autre mathématicien prestigieux et détenteur de la médaille Fields, le Russe Vladimir Voevodsky (1966-2017), a craint aussi que les mathématiques ne soient pas assez bien protégées de la contradiction et de l'erreur. Il a par ailleurs défendu l'idée qu'il est devenu nécessaire de pratiquer les mathématiques d'une nouvelle façon.

Voevodsky était inquiet car son domaine de recherche, la géométrie algébrique, oblige à des démonstrations très longues et complexes, au point que plusieurs fois des erreurs se sont glissées dans des démonstrations et sont passées inaperçues durant des années. Lui-même a découvert, en retravaillant sur l'un de ses anciens articles, qu'il avait proposé une démonstration fautive. Après un gros travail, il a su

remettre sa preuve sur pied. Le plus inquiétant à propos de cette erreur est que plusieurs groupes de mathématiciens avaient travaillé en commun sur l'article erroné sans y repérer d'erreur. Il mentionna aussi le cas d'un article de son domaine où les chercheurs ont été obligés de remplacer un paragraphe faux de quelques lignes par trente pages, issues d'un effort des spécialistes s'étalant sur plus de cinq ans.

Voevodsky en était arrivé à la conclusion que dans sa spécialité, le système habituel de validation des démonstrations par les autres chercheurs du domaine n'était plus suffisant pour garantir la correction des travaux. Il écrivit: «Pour mener mon travail avec un niveau de rigueur et de précision que je pensais nécessaire, il aurait fallu un énorme effort de ma part et cela n'aurait produit que des textes très difficiles à lire. De plus, qui serait vraiment en mesure d'assurer que je n'ai rien oublié et que je n'ai laissé aucune erreur, puisque des erreurs relativement simples attendent des années avant d'être découvertes? Je pense que c'est à ce moment que j'ai arrêté de faire ce que j'appellais de la recherche conduite par la curiosité, et que je me suis mis à penser sérieusement au futur. Je n'avais pas les outils pour explorer ce vers quoi ma curiosité m'entraînait et que je considérais comme ayant de l'intérêt, de la valeur et de la beauté.»

Ses doutes sur la non-contradiction des théories habituelles, associés à son expérience avec les erreurs impossibles à maîtriser de son domaine de recherche, le conduisirent à imaginer une façon nouvelle d'écrire et de pratiquer les mathématiques. Pour reprendre le contrôle et assurer la rigueur des travaux mathématiques de son domaine, Voevodsky jugea indispensable que chaque point du développement d'une

LA CONTRADICTION UTILE : LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

4

Les mathématiciens évitent à tout prix les contradictions, sauf quand ils en utilisent la présence temporaire dans ce qu'on dénomme les « démonstrations par l'absurde ».

Rappelons-en le principe.

Pour prouver une affirmation A, on commence par faire l'hypothèse inverse, non-A. On mène alors un raisonnement jusqu'à arriver à une contradiction, par exemple en démontrant A (le contraire de l'hypothèse faite). Le fait d'avoir obtenu une absurdité ne peut signifier qu'une chose : l'hypothèse initiale du raisonnement est fautive. Par conséquent, non-A est faux, donc A est vrai.

Par exemple, démontrons par cette méthode que « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Supposons le contraire, c'est-à-dire que « 36 est une puissance de 2 », donc que 36 est de la forme 2^n pour un certain entier n. En divisant par 2 chaque côté de l'égalité $36 = 2^n$, on obtient : $18 = 2^{n-1}$. On recommence : $9 = 2^{n-2}$. Nécessairement, $n - 2 \geq 1$, donc $9 = 2 \times 2^{n-3}$, où 2^{n-3} est un entier. Donc 9 est pair. C'est absurde.

On en tire la conclusion : « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Le raisonnement par l'absurde est très important en mathématiques. C'est par exemple lui que Georg Cantor a utilisé pour montrer que l'infini des nombres réels est strictement plus grand que l'infini des nombres entiers.

Le principe du raisonnement par l'absurde correspond à la formule logique :

$$(\text{non-A} \Rightarrow (\text{B et non-B})) \Rightarrow \text{A}$$

La crainte de la contradiction en mathématiques provient de la règle logique *ex falso quodlibet* : (B et non-B) $\Rightarrow$ A. Elle signifie que dès qu'une seule contradiction est obtenue, tout est vrai.

On peut démontrer la règle *ex falso quodlibet* de plusieurs façons, mais le raisonnement par l'absurde constitue la plus simple :

Si on a (B et non-B), alors on a aussi (non-A) $\Rightarrow$ (B et non-B) (car, quand X est vrai, on a $Y \Rightarrow X$ pour tout Y). Donc, d'après la règle du raisonnement par l'absurde, A est vrai. On a ainsi établi que partant de (B et non-B), on obtenait A ; autrement dit, on a établi la règle *ex falso quodlibet*.