

- > On peut donc défendre que ces systèmes contradictoires sont apparus à propos d'idées que l'on n'avait pas encore bien testées, systèmes dont on n'a pas su mesurer immédiatement qu'ils étaient si puissants qu'ils donnaient des contradictions. En revanche, jamais une théorie bien installée, comme l'arithmétique de Peano, ne s'est trouvée dans cette situation.

Doit-on penser comme Nelson que cela n'est dû qu'à notre exploration insuffisante des systèmes que nous utilisons, et que si nous n'y prenons pas garde ils finiront par s'écrouler? Ou au contraire, doit-on, comme beaucoup de mathématiciens le soutiennent, affirmer que s'il y avait une contradiction possible dans les systèmes utilisés depuis longtemps, elle serait apparue, et donc que leur absence doit nous rassurer?

LA FÉCONDE INQUIÉTUDE DE VLADIMIR VOEVOVSKY

Un autre mathématicien prestigieux et détenteur de la médaille Fields, le Russe Vladimir Voevodsky (1966-2017), a craint aussi que les mathématiques ne soient pas assez bien protégées de la contradiction et de l'erreur. Il a par ailleurs défendu l'idée qu'il est devenu nécessaire de pratiquer les mathématiques d'une nouvelle façon.

Voevodsky était inquiet car son domaine de recherche, la géométrie algébrique, oblige à des démonstrations très longues et complexes, au point que plusieurs fois des erreurs se sont glissées dans des démonstrations et sont passées inaperçues durant des années. Lui-même a découvert, en retravaillant sur l'un de ses anciens articles, qu'il avait proposé une démonstration fautive. Après un gros travail, il a su

remettre sa preuve sur pied. Le plus inquiétant à propos de cette erreur est que plusieurs groupes de mathématiciens avaient travaillé en commun sur l'article erroné sans y repérer d'erreur. Il mentionna aussi le cas d'un article de son domaine où les chercheurs ont été obligés de remplacer un paragraphe faux de quelques lignes par trente pages, issues d'un effort des spécialistes s'étalant sur plus de cinq ans.

Voevodsky en était arrivé à la conclusion que dans sa spécialité, le système habituel de validation des démonstrations par les autres chercheurs du domaine n'était plus suffisant pour garantir la correction des travaux. Il écrivit: «Pour mener mon travail avec un niveau de rigueur et de précision que je pensais nécessaire, il aurait fallu un énorme effort de ma part et cela n'aurait produit que des textes très difficiles à lire. De plus, qui serait vraiment en mesure d'assurer que je n'ai rien oublié et que je n'ai laissé aucune erreur, puisque des erreurs relativement simples attendent des années avant d'être découvertes? Je pense que c'est à ce moment que j'ai arrêté de faire ce que j'appelais de la recherche conduite par la curiosité, et que je me suis mis à penser sérieusement au futur. Je n'avais pas les outils pour explorer ce vers quoi ma curiosité m'entraînait et que je considérais comme ayant de l'intérêt, de la valeur et de la beauté.»

Ses doutes sur la non-contradiction des théories habituelles, associés à son expérience avec les erreurs impossibles à maîtriser de son domaine de recherche, le conduisirent à imaginer une façon nouvelle d'écrire et de pratiquer les mathématiques. Pour reprendre le contrôle et assurer la rigueur des travaux mathématiques de son domaine, Voevodsky jugea indispensable que chaque point du développement d'une

LA CONTRADICTION UTILE: LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

4

Les mathématiciens évitent à tout prix les contradictions, sauf quand ils en utilisent la présence temporaire dans ce qu'on dénomme les « démonstrations par l'absurde ». Rappelons-en le principe.

Pour prouver une affirmation A, on commence par faire l'hypothèse inverse, non-A. On mène alors un raisonnement jusqu'à arriver à une contradiction, par exemple en démontrant A (le contraire de l'hypothèse faite). Le fait d'avoir obtenu une absurdité ne peut signifier qu'une chose : l'hypothèse initiale du raisonnement est fautive. Par conséquent, non-A est faux, donc A est vrai.

Par exemple, démontrons par cette méthode que « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Supposons le contraire, c'est-à-dire que « 36 est une puissance de 2 », donc que 36 est de la forme 2^n pour un certain entier n. En divisant par 2 chaque côté de l'égalité $36 = 2^n$, on obtient : $18 = 2^{n-1}$. On recommence : $9 = 2^{n-2}$. Nécessairement, $n - 2 \geq 1$, donc $9 = 2 \times 2^{n-3}$, où 2^{n-3} est un entier. Donc 9 est pair. C'est absurde.

On en tire la conclusion : « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Le raisonnement par l'absurde est très important en mathématiques. C'est par exemple lui que Georg Cantor a utilisé pour montrer que l'infini des nombres réels est strictement plus grand que l'infini des nombres entiers.

Le principe du raisonnement par l'absurde correspond à la formule logique :

$$(\text{non-A} \Rightarrow (\text{B et non-B})) \Rightarrow \text{A}$$

La crainte de la contradiction en mathématiques provient de la règle logique *ex falso quodlibet* : (B et non-B) $\Rightarrow$ A. Elle signifie que dès qu'une seule contradiction est obtenue, tout est vrai.

On peut démontrer la règle *ex falso quodlibet* de plusieurs façons, mais le raisonnement par l'absurde constitue la plus simple : Si on a (B et non-B), alors on a aussi (non-A) $\Rightarrow$ (B et non-B) (car, quand X est vrai, on a $Y \Rightarrow X$ pour tout Y). Donc, d'après la règle du raisonnement par l'absurde, A est vrai. On a ainsi établi que partant de (B et non-B), on obtenait A ; autrement dit, on a établi la règle *ex falso quodlibet*.

théorie, tant l'introduction de nouveaux objets que l'écriture des preuves, soit validé par un système informatique adapté. Des idées précises nouvelles sur la façon de mettre en œuvre cet objectif lui apparurent. Cela donna lieu à un programme de travail auquel il associa pendant un an une équipe de chercheurs réputés, dont le Français Thierry Coquant.

Le livre résultant de cette année de travail, *Homotopy Type Theory - Univalent Foundations of Mathematics*, est disponible gratuitement sur Internet (<https://homotopytypetheory.org/book/>). Il comporte une présentation de la logique particulière nécessaire au projet, la «théorie homotopique des types» (HoTT) et mène le développement d'une série de domaines mathématiques classiques et nouveaux en s'appuyant sur la nouvelle conception. Tout le contenu de l'ouvrage a été contrôlé par des outils informatiques.

La parution du livre a été saluée dans la communauté mathématique comme une révolution. Même si l'usage de cette méthode générale plus sûre pour faire des mathématiques n'a pour l'instant séduit qu'un petit nombre de chercheurs, l'approche proposée est vue comme une nouvelle façon de fonder et pratiquer des mathématiques. Se substituera-t-elle à la méthode habituelle s'appuyant sur la théorie des ensembles ou sur des systèmes mathématiques classiques tels que les axiomes de Peano? Il est probable qu'elle ne concernera dans un premier temps que les domaines les plus difficiles, comme celui à l'origine du projet de Voevodsky.

ASSISTANTS DE PREUVE

La méthode des assistants de preuve, des systèmes informatiques qui aident les mathématiciens à écrire tous les détails d'une démonstration et à les contrôler, a déjà obtenu de nombreux succès. Le système *Coq* développé en France par l'Inria (<https://coq.inria.fr>) est un tel système reconnu et utilisé dans de monde entier.

Les assistants de preuve ont permis la vérification définitive du théorème des quatre couleurs («Quatre couleurs suffisent pour colorier toute carte de façon que les pays frontaliers soient de couleur différente») et la confirmation, elle aussi définitive, de la justesse de la preuve de la conjecture de Kepler (relative au rangement optimal des sphères dans l'espace) par Thomas Hales. L'idée nouvelle est de changer définitivement la pratique mathématique, l'ordinateur et le mathématicien devenant associés comme deux frères siamois qui élaborent les mathématiques sans qu'il soit possible que des erreurs s'y glissent.

Cette nouvelle façon de faire des mathématiques ne résout cependant pas tous les problèmes de contradiction et d'erreur. Les assistants de preuve comme la méthode de

Voevodsky sont sujets à deux types de difficultés.

D'une part, le système logique qu'on programme dans l'assistant de preuve peut être contradictoire, auquel cas, avec l'accord de la machine, on arrivera à démontrer E et non-E. On ne s'interrogera pas sur la validité de la découverte d'une contradiction, mais il faudra quand même réparer le système. L'utilisation d'un tel outil aurait évité à Nelson son annonce injustifiée de la présence d'une contradiction en arithmétique, car sa prétendue découverte d'une contradiction n'aurait pas obtenu l'approbation de la machine.

PAS DE SOLUTION ULTIME

D'autre part, le programme de l'assistant de preuve peut comporter des bugs (erreurs de programmation). Bien sûr, tout est fait pour éviter cela. Parfois même, on vérifie la correction du programme de l'assistant de preuve avec un autre assistant de preuve. Pourtant, éliminer totalement le risque de bug est impossible, car même si le programme de l'assistant de preuve est parfait, ce qu'il produit dépend aussi du système d'exploitation des ordinateurs utilisés et des puces électroniques qui exécutent les calculs dans les niveaux profonds de la machine. Reste ainsi la possibilité que rien d'anormal n'apparaisse et que, silencieusement, un bug profond conduise à valider une preuve pourtant fausse. On diminue la probabilité que subsiste une erreur, mais on ne la réduit jamais à zéro.

Concernant la non-contradiction des systèmes tels que HoTT, des travaux récents de Michael Rathjen, de l'université de Leeds, en Grande-Bretagne, ont montré que ces systèmes sont «équi-consistants» à des systèmes logiques classiques. Cela signifie que les nouveaux systèmes produiront une contradiction si et seulement si les systèmes classiques équivalents en produisent.

Cette solidarité entre des systèmes anciens et les nouveaux est en définitive rassurante. Sans que cela soit une preuve de non-contradiction, cette force équivalente des systèmes s'appuyant sur des intuitions différentes rend de moins en moins probable que l'on trouve une contradiction dans l'un ou l'autre. Nelson a eu raison de rechercher des contradictions et raison de se tromper; cela nous rassure et s'ajoute aux autres motifs indirects que nous avons de croire que la façon dont nous pratiquons les mathématiques ne produira pas de contradictions. Que l'on utilise des assistants de preuve quand cela s'impose, ou que l'on continue à procéder comme autrefois par contrôles humains pour les domaines les plus simples, il ne semble pas en définitive que la reine des sciences soit sur le point de s'écrouler! ■

BIBLIOGRAPHIE

Documents divers sur Vladimir Voevodsky :
www.ias.edu/idea-tags/vladimir-voevodsky

T. Y. Chow, **The consistency of arithmetic**, *Math. Intelligencer*, 2018 (doi.org/10.1007/s00283-018-9837-z et <https://arxiv.org/pdf/1807.05641.pdf>).

A. Cantini et R. Bruni, **Paradoxes and contemporary logic**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2017 (<https://stanford.io/2RRpvGD>).

E. Nelson, **Elements**, prépublication, 2015. (<https://arxiv.org/abs/1510.00369>).

J. Hamkins et al., **Generalizations of the Kunen inconsistency**, *Ann. Pure Appl. Logic*, vol. 163(2), pp. 1872-1890, 2012.

E. Nelson, **Warning signs of a possible collapse of contemporary mathematics**, dans M. Heller et W. H. Woodin (éds.), *Infinity : New Research Frontiers*, Cambridge University Press, 2011 (<https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/warn.pdf>).

S. Kritchman et R. Raz, **The surprise examination paradox and the second incompleteness theorem**, *Notices of the AMS*, vol. 57, pp. 1454-1458, 2010.