

L'ESSENTIEL

> Le mot « Hexagone » sert souvent à désigner la France métropolitaine et continentale.

> On peut se demander si la carte géographique de ce territoire est bien représentée par un hexagone régulier.

> Comme critère de qualité de cette représentation, les auteurs ont choisi l'aire totale

des non-recouvrements, qui doit être minimale.

> Leurs calculs ont montré que le polygone régulier qui représente le mieux la France métropolitaine n'est pas un hexagone, mais un carré.

LES AUTEURS

KAREL ZIMMERMANN
physicien, a été maître de conférences à l'université Pierre-et-Marie-Curie, à Paris, et chercheur à l'Inra (unités MIG puis MaIAGE)

FRANÇOIS RODOLPHE
mathématicien, a été chercheur à l'Inra (unités MIG puis MaIAGE)

TATIANA ZHARINOVA-ZIMMERMANN
infographiste

JOËL POTHIER
bio-informaticien, maître de conférences à Sorbonne Université, à Paris

Aux quatre coins de l'Hexagone

Quel est le polygone régulier qui représente le mieux la carte de la France métropolitaine et continentale ? Des calculs simples d'optimisation répondent à la question et montrent que le surnom d'« Hexagone » est plutôt usurpé.

Les Italiens nomment souvent la partie continentale de leur pays « la Péninsule », qualificatif géographique incontestable. Les médias italiens emploient aussi l'expression « la Botte » (*la Stivale*) pour désigner leur pays lorsqu'ils parlent d'économie ou de météorologie, et c'est souvent ainsi qu'en France on dénomme l'Italie. Sur une carte géographique, la ressemblance de l'Italie avec une botte est en effet frappante.

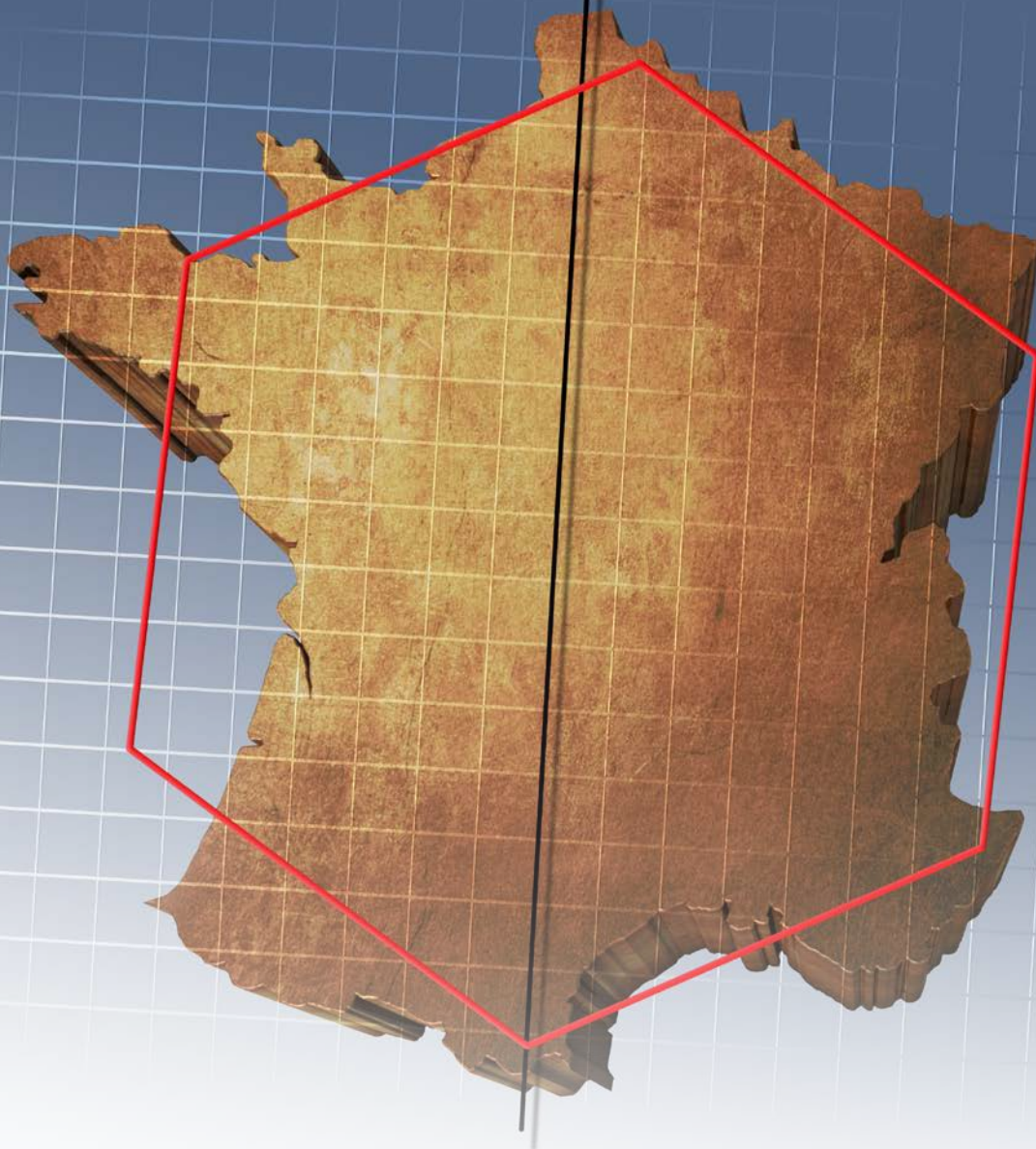
La France, elle, reçoit un nom dont la justification est bien moins évidente. « L'Hexagone » est l'antonomase utilisée très couramment dans ce pays pour désigner la France métropolitaine continentale. On la trouve dans des titres de livres, dans la publicité, etc. D'ailleurs, le titre de cet article est un emprunt à des hommes politiques peu férus de rigueur géométrique. Or nous avons demandé à des collègues et amis étrangers « innocents » (ceux qui ne savaient pas que la France devrait être un hexagone !) à quoi ressemblait, selon eux, la carte du pays. Plus d'un quart des réponses (27%) ont évoqué une étoile à cinq branches ou un pentagone, 8% un octogone ou

un carré, mais la plupart des réponses (« une peau tannée », « un fantôme », « une tête de chien »...) correspondaient davantage à des réponses au test de Rorschach utilisé par les psychologues qu'à l'évocation d'une figure géométrique simple et élégante. Et surtout, personne n'a évoqué d'hexagone, régulier ou non.

UN MYTHE HEXAGONAL

Le mythe de l'hexagone français a plusieurs explications. Si certains géographes ont préféré un pentagone, comme Théophile-Sébastien Lavallée sous le Second Empire et Emmanuel de Martonne sous la Troisième République, ou un octogone, comme Élisée Reclus à la fin du XIX^e siècle, l'hexagone semble l'avoir emporté parce qu'il incluait plus explicitement l'Alsace et la Moselle !

Certains ont justifié ce choix en parlant de « six points saillants ». Il est incontestable que six points du plan, choisis plus ou moins arbitrairement, forment un hexagone irrégulier, mais cela est peu informatif : si l'on choisissait huit points, la France ressemblerait à un octogone, et plus on choisit de points sur le contour de la France,



mieux ils représenteront la France et ils formeront toujours un polygone.

Pour que le problème de l'approximation de la France par une figure géométrique simple soit intéressant, il faut le contraindre, par exemple en se limitant aux polygones réguliers (polygones à côtés et angles égaux). L'argument affirmant que la France «s'inscrit dans un hexagone régulier» n'a pas de sens: la France, comme n'importe quel objet d'étendue finie, peut s'inscrire dans n'importe quelle figure géométrique, un triangle, un carré, un cercle... pourvu que cette figure soit assez grande.

Plusieurs questions se posent alors. Si la France devait ressembler à un polygone régulier, quelle en serait la taille et comment serait-il orienté (quelle serait son inclinaison par rapport à l'axe nord-sud)? Où se trouverait le centre du polygone? L'hexagone est-il le polygone régulier auquel la France ressemble le plus? Enfin, comment comprendre le mot «ressemble»? Nous allons ici essayer de répondre à toutes ces questions.

Il va de soi que le raisonnement doit se fonder sur la forme du bord (rivages et frontières)

L'hexagone régulier qui représente le mieux la France, en minimisant l'aire des surfaces qui débordent de l'une ou l'autre figure, a pour rayon (celui du cercle circonscrit) 450,5 kilomètres, et son inclinaison est de 3,0° vers l'est (l'axe nord-sud est ici en noir).

de la France continentale, et pas seulement sur quelques points choisis. Mais qu'est-ce que «la France»? La France est un morceau de surface terrestre, qui est accidenté et ne tient pas dans un plan. Pour assimiler ce pays à une figure géométrique plane quelconque, il faut passer par sa représentation plane, c'est-à-dire par une carte, ou au moins une carte de son bord, numérisée.

Devant l'impossibilité d'obtenir des données exploitables de l'IGN (l'Institut national de géographie), nous avons acheté la carte Michelin routière et touristique de la France datée de 2017 (échelle 1/1000000) et nous l'avons fait numériser. En utilisant un logiciel de retouche photographique (plusieurs permettent de le faire), nous avons noté, point après point, les coordonnées (x, y) du bord de la France continentale (sans les îles côtières).

Nous avons obtenu ainsi 5250 points espacés de $1,2 \pm 0,9$ kilomètre. Ils sont moins espacés en Bretagne, dont la côte est très découpée, qu'en Normandie où la côte est souvent rectiligne. Avec une numérisation à 300 points par pouce et en tenant compte de l'épaisseur des lignes sur la carte, on peut estimer que les >

➤ coordonnées des points ont été obtenues avec la précision de 1 pixel, c'est-à-dire de 90 mètres environ. De cette façon, nous avons représenté «la France» par un polygone irrégulier comportant 5250 sommets.

Pour tester si la France ressemble à une figure géométrique quelconque, on pourrait découper celle-ci dans du carton et la superposer sur la carte du pays de telle façon que l'une déborde le moins possible de l'autre. Une figure trop grande couvrirait bien la France, mais elle-même déborderait trop; tandis qu'une figure trop petite ne déborderait pas, mais ne recouvrirait pas une grande partie de la France.

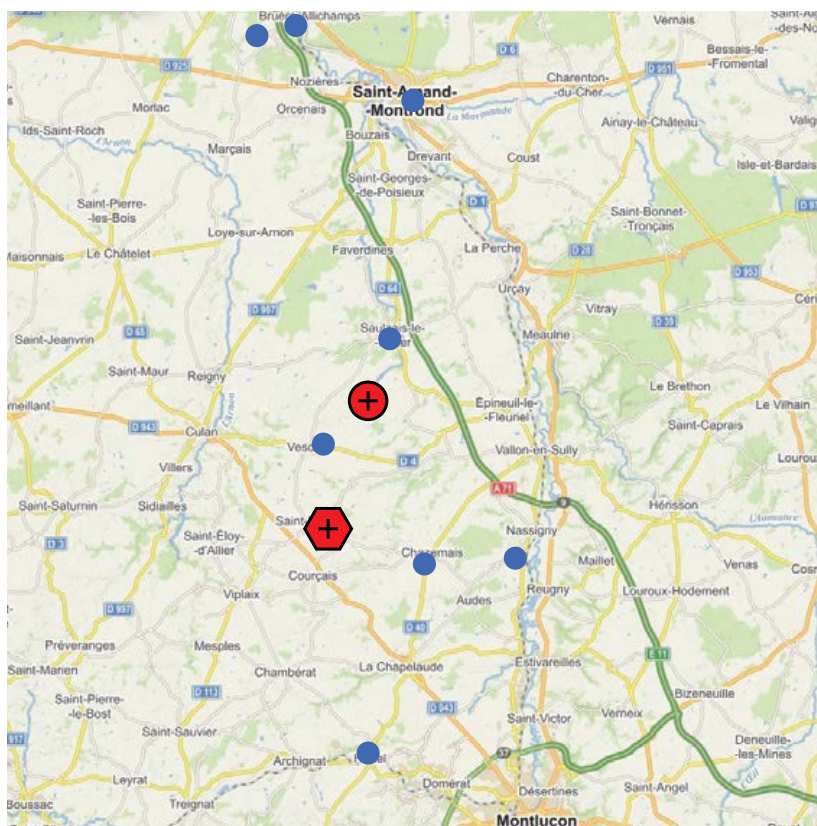
MINIMISER L'AIRES TOTALE DES DÉBOREMENTS

On peut considérer que le meilleur recouvrement est obtenu lorsque la somme des aires des débordements (ceux du polygone et ceux de la France) est la plus petite possible (voir la figure page ci-contre). Trouver, dans une famille donnée de figures géométriques (les hexagones réguliers par exemple), celle qui minimise l'aire des débordements est un problème d'optimisation.

Un polygone régulier d'«ordre» donné (c'est-à-dire ayant un nombre donné de côtés) est défini par quatre paramètres. Par exemple, on peut choisir L, X, Y, α où L est la taille du polygone, X et Y sont les coordonnées de son centre et α est l'angle qui décrit son orientation. Le problème consistant à trouver les valeurs des quatre paramètres qui rendent le polygone optimal est simple. Mais il peut receler des pièges, en particulier l'existence possible de minimums locaux. Dans notre cas, un minimum local correspond à un polygone régulier de l'ordre considéré, tel que tout léger changement des paramètres (orientation, taille, positionnement) augmente la somme des aires des débordements, alors qu'il existe un autre polygone du même ordre, de paramètres franchement différents, qui fournit un meilleur ajustement.

En pratique, on peut déterminer efficacement ces paramètres (L, X, Y, α) par une méthode d'optimisation numérique, implémentée dans des logiciels facilement disponibles. Le choix de l'aire des débordements comme critère d'optimisation rend la méthode assez robuste vis-à-vis de la densité des points choisis sur le bord de la France (pourvu qu'elle soit suffisante pour décrire correctement sa forme) ainsi que de la précision des coordonnées (x, y) des points individuels.

Avant de présenter les résultats de ces calculs d'optimisation, signalons un autre élément intéressant. Puisque l'on a représenté la France par un polygone irrégulier de 5250 côtés, on peut aussi calculer son barycentre. Il s'agit du barycentre de la France vue comme une surface plane, c'est-à-dire du centre de gravité d'un



carton de densité et d'épaisseur uniformes découpé en suivant le bord de la France. Plusieurs localités revendiquent déjà le titre de centre de la France. L'IGN ne précise pas sa méthode pour déterminer ce point, et les autres méthodes (utilisant, par exemple, le cercle, ou le quadrilatère minimal circonscrit, ou le cercle maximal inscrit) ne sont pas très convaincantes. Le calcul du barycentre de notre polygone défini par les 5250 points est aujourd'hui facile à faire avec un ordinateur, en utilisant les coordonnées de ces sommets.

Tous les calculs, tant ceux du polygone optimal que du barycentre, ont été programmés avec le logiciel libre Scilab. La carte utilisée

Le centre de l'hexagone optimal recouvrant la France est, sur cette carte, le petit hexagone rouge à côté de la route D943. Le rond rouge entre la D4 et l'A71 est le barycentre de la France (c'est-à-dire du polygone à 5250 sommets choisis par les auteurs qui approxime la carte géographique du pays). Les ronds bleus sont les différents autres lieux qui revendiquent le titre de centre de la France.

La méthode d'optimisation est peu sensible aux imprécisions de la carte