

> coordonnées des points ont été obtenues avec la précision de 1 pixel, c'est-à-dire de 90 mètres environ. De cette façon, nous avons représenté «la France» par un polygone irrégulier comportant 5250 sommets.

Pour tester si la France ressemble à une figure géométrique quelconque, on pourrait découper celle-ci dans du carton et la superposer sur la carte du pays de telle façon que l'une débord le moins possible de l'autre. Une figure trop grande couvrirait bien la France, mais elle-même déborderait trop; tandis qu'une figure trop petite ne déborderait pas, mais ne recouvrirait pas une grande partie de la France.

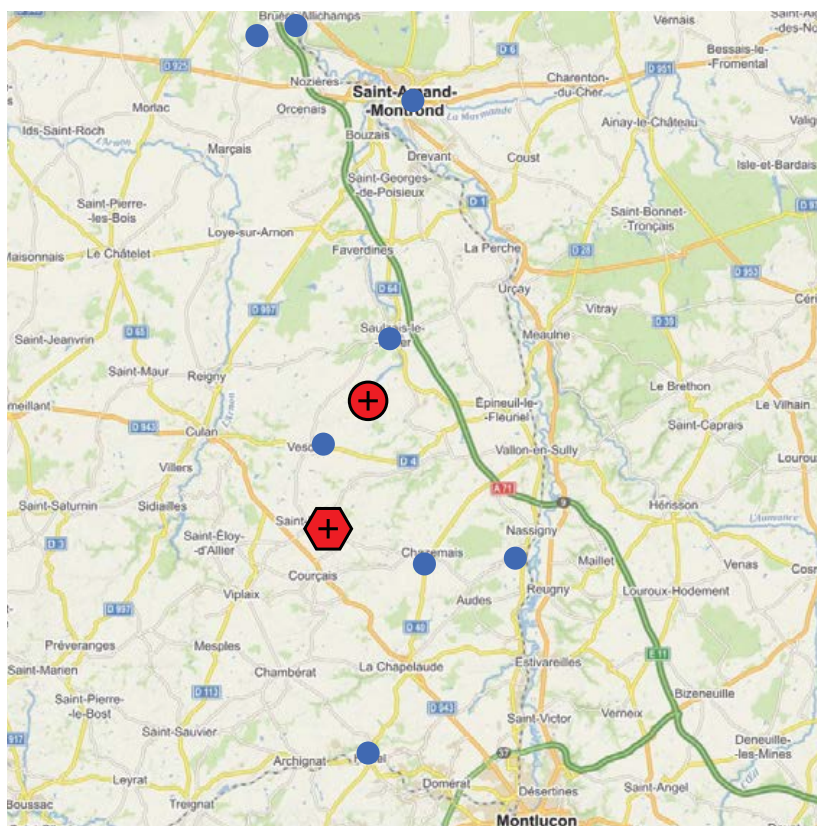
MINIMISER L'AIRES TOTALE DES DÉBOREMENTS

On peut considérer que le meilleur recouvrement est obtenu lorsque la somme des aires des débordements (ceux du polygone et ceux de la France) est la plus petite possible (voir la figure page ci-contre). Trouver, dans une famille donnée de figures géométriques (les hexagones réguliers par exemple), celle qui minimise l'aire des débordements est un problème d'optimisation.

Un polygone régulier d'«ordre» donné (c'est-à-dire ayant un nombre donné de côtés) est défini par quatre paramètres. Par exemple, on peut choisir L , X , Y , α où L est la taille du polygone, X et Y sont les coordonnées de son centre et α est l'angle qui décrit son orientation. Le problème consistant à trouver les valeurs des quatre paramètres qui rendent le polygone optimal est simple. Mais il peut receler des pièges, en particulier l'existence possible de minimums locaux. Dans notre cas, un minimum local correspond à un polygone régulier de l'ordre considéré, tel que tout léger changement des paramètres (orientation, taille, positionnement) augmente la somme des aires des débordements, alors qu'il existe un autre polygone du même ordre, de paramètres franchement différents, qui fournit un meilleur ajustement.

En pratique, on peut déterminer efficacement ces paramètres (L , X , Y , α) par une méthode d'optimisation numérique, implémentée dans des logiciels facilement disponibles. Le choix de l'aire des débordements comme critère d'optimisation rend la méthode assez robuste vis-à-vis de la densité des points choisis sur le bord de la France (pourvu qu'elle soit suffisante pour décrire correctement sa forme) ainsi que de la précision des coordonnées (x, y) des points individuels.

Avant de présenter les résultats de ces calculs d'optimisation, signalons un autre élément intéressant. Puisque l'on a représenté la France par un polygone irrégulier de 5250 côtés, on peut aussi calculer son barycentre. Il s'agit du barycentre de la France vue comme une surface plane, c'est-à-dire du centre de gravité d'un

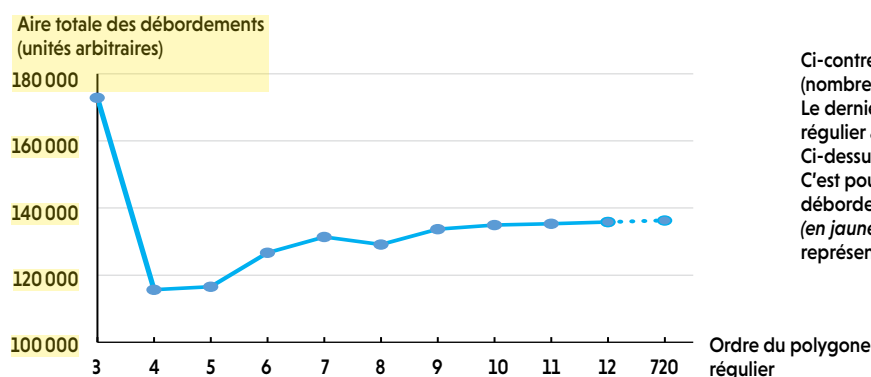
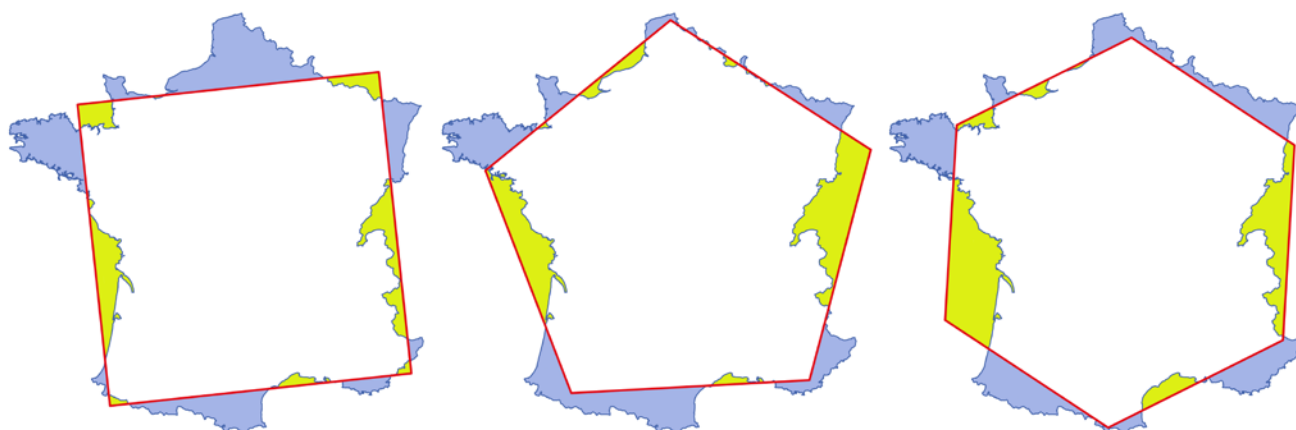


carton de densité et d'épaisseur uniformes découpé en suivant le bord de la France. Plusieurs localités revendiquent déjà le titre de centre de la France. L'IGN ne précise pas sa méthode pour déterminer ce point, et les autres méthodes (utilisant, par exemple, le cercle, ou le quadrilatère minimal circonscrit, ou le cercle maximal inscrit) ne sont pas très convaincantes. Le calcul du barycentre de notre polygone défini par les 5250 points est aujourd'hui facile à faire avec un ordinateur, en utilisant les coordonnées de ces sommets.

Tous les calculs, tant ceux du polygone optimal que du barycentre, ont été programmés avec le logiciel libre Scilab. La carte utilisée

Le centre de l'hexagone optimal recouvrant la France est, sur cette carte, le petit hexagone rouge à côté de la route D943. Le rond rouge entre la D4 et l'A71 est le barycentre de la France (c'est-à-dire du polygone à 5250 sommets choisis par les auteurs qui approxime la carte géographique du pays). Les ronds bleus sont les différents autres lieux qui revendiquent le titre de centre de la France.

La méthode d'optimisation est peu sensible aux imprécisions de la carte



Ci-contre : l'aire des débordements en fonction de l'ordre (nombre de sommets) du polygone régulier optimal. Le dernier point du graphique correspond au polygone régulier à 720 sommets, qui est très proche d'un cercle. Ci-dessus : le carré, le pentagone et l'hexagone optimaux. C'est pour le carré que la somme des aires des débordements de la France (en bleu) et du polygone (en jaune) est la plus petite. Autrement dit, un carré représente mieux la France qu'un hexagone.

ainsi que la précision de l'optimisation numérique ont permis de déterminer les coordonnées du centre de l'hexagone optimal : $46^{\circ}29'49''\text{N}$, $2^{\circ}27'13''\text{E}$ à 4" près, ce qui représente une précision de l'ordre de l'hectomètre. D'après GoogleMaps, ce point se situe dans le périmètre de la commune de Saint-Désiré, dans le département de l'Allier (voir la figure page précédente).

Quant au barycentre de la France, nous avons obtenu comme position approximative les coordonnées $46^{\circ}33'54''\text{N}$, $2^{\circ}28'58''\text{E}$; il se trouve dans le périmètre de la commune de Vesdun, dans le département du Cher. Il est très proche du barycentre de l'ensemble des centres des communes de la France métropolitaine, pondéré par les superficies des communes ($46^{\circ}32'23''\text{N}$, $2^{\circ}25'49''\text{E}$). Néanmoins, le calcul de ce dernier prenait en compte les îles côtières, ce qui n'est pas notre cas.

On peut ainsi estimer que la position du centre de l'hexagone régulier optimal représentant la France continentale est déterminée à une centaine de mètres près et qu'il ne serait pas sérieux de la présenter avec plus de précision. Elle résulte d'un processus numérique d'optimisation où une certaine imprécision est inévitable. Les coordonnées géographiques des autres centres potentiels de la France que l'on voit mentionnés dans divers documents sont présentées avec la précision de 1", c'est-à-dire environ 31 mètres. Mais rien ne garantit que

les données de départ et surtout la méthode employée autorisent une telle précision!

Ce qui précède porte sur l'hexagone régulier, mais on peut envisager d'autres polygones réguliers susceptibles de représenter la France : un triangle équilatéral, un carré, un pentagone régulier, etc. Nous avons donc répété le calcul pour plusieurs polygones réguliers (voir les figures ci-dessus).

LE POLYGONE OPTIMAL A BIEN QUATRE COINS

Dans les résultats, on remarque par exemple que le carré optimal déborde manifestement beaucoup moins de la France que celle-ci ne déborde du carré. Notre critère d'optimisation, la minimisation de la somme des aires des débordements, n'implique en effet pas que les aires des débordements mutuels soient égales. Trouver le polygone régulier qui minimiserait les aires des débordements, en les maintenant égales, serait un autre problème d'optimisation et conduirait à des résultats différents.

Cependant, la principale conclusion à laquelle nos calculs conduisent est que si la France devait ressembler à un polygone régulier, ce serait de préférence un carré, voire, à défaut, un pentagone. L'hexagone ne viendrait qu'à la troisième place, suivi d'un octogone. Cela justifie les propositions de certains géographes anciens et surtout le titre de cet article : l'Hexagone est carré! ■

SUR LE WEB

Articles « **Hexagone (France)** », « **Centre de la France** » et « **Aire et centre de masse d'un polygone** » sur Wikipédia.

Page « **Centre de gravité** » du site Math 15873 de Michel Berteau : <http://math.15873.pagesperso-orange.fr/page9.htm>