

R

ENDEZ-VOUS

P.82 Logique & calcul
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

DÉCOUPER UN TRIANGLE EN TRIANGLES

Est-il possible de découper un triangle en un nombre donné de morceaux triangulaires plus petits? Aujourd'hui encore, on découvre de nouveaux et remarquables résultats sur ce type de questions.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)

Certains des résultats que nous allons présenter serviront aux enseignants pour animer leurs classes avec des problèmes amusants que l'on résout en réalisant de petits dessins; d'autres serviront à concevoir des exercices de programmation et montreront l'utilité des ordinateurs en mathématiques; d'autres encore illustreront que partout, même au sujet des plus élémentaires structures géométriques, se glissent de délicates questions qui exigent de longs raisonnements, et parfois restent non résolues.

L'ÉNIGME DU NOMBRE DE DÉCOUPAGES

Il existe 4 façons de découper un triangle en trois triangles plus petits (*triangles A₁ à A₄ dans l'encadré 1, page ci-contre*). Un seul de ces découpages (A₁) ne contient pas de triangles se regroupant en un triangle interne: on dira que c'est un découpage premier (par analogie avec les nombres premiers). Quand nous affirmons qu'il n'y a qu'un seul découpage premier d'un triangle en 3 triangles, nous voulons dire que tout autre découpage premier d'un triangle en 3 triangles se ramènera à celui-là par une transformation continue du plan qui préserve les segments de droites utilisés dans les dessins.

En langage plus simple, deux découpages seront considérés équivalents si, en ayant dessiné le premier sur une feuille de caoutchouc parfaitement élastique, on sait déformer la feuille en s'arrangeant pour que les segments

de droites des dessins restent droits à chaque instant, sans la déchirer ni la replier, et qu'on réussit à faire coïncider le premier découpage avec le second. On dit alors qu'il n'y a qu'un seul découpage premier du triangle en 3 triangles «à une déformation topologique continue près». Dans la suite, nous ne mentionnerons plus, en général, cette précision.

Autre résultat, qui demande plus de soin: il existe 23 découpages d'un triangle en 4 triangles, et 3 d'entre eux sont premiers. Amusez-vous à reconnaître les découpages premiers dans les figures de l'encadré 1 ou, mieux, essayez de retrouver vous-même les 23 découpages (de B₁ à B₂₃).

Une autre question se pose: les 23 découpages sont-ils tous vraiment différents au sens topologique? Pour s'en assurer voici une méthode. Pour chaque découpage, on considère les points de rencontre des segments intérieurs au triangle et on note leurs caractéristiques.

Pour le découpage B₁, par exemple, il n'y a qu'un seul point intérieur, et il correspond à la rencontre de 3 segments. On notera cela {3}.

Pour le découpage B₂, on a 2 points intérieurs, le premier est la rencontre de 3 segments, tandis que le second est la rencontre d'une extrémité de segment avec un point intérieur à un segment. On notera {3, 1+1/2} cette caractéristique du découpage.

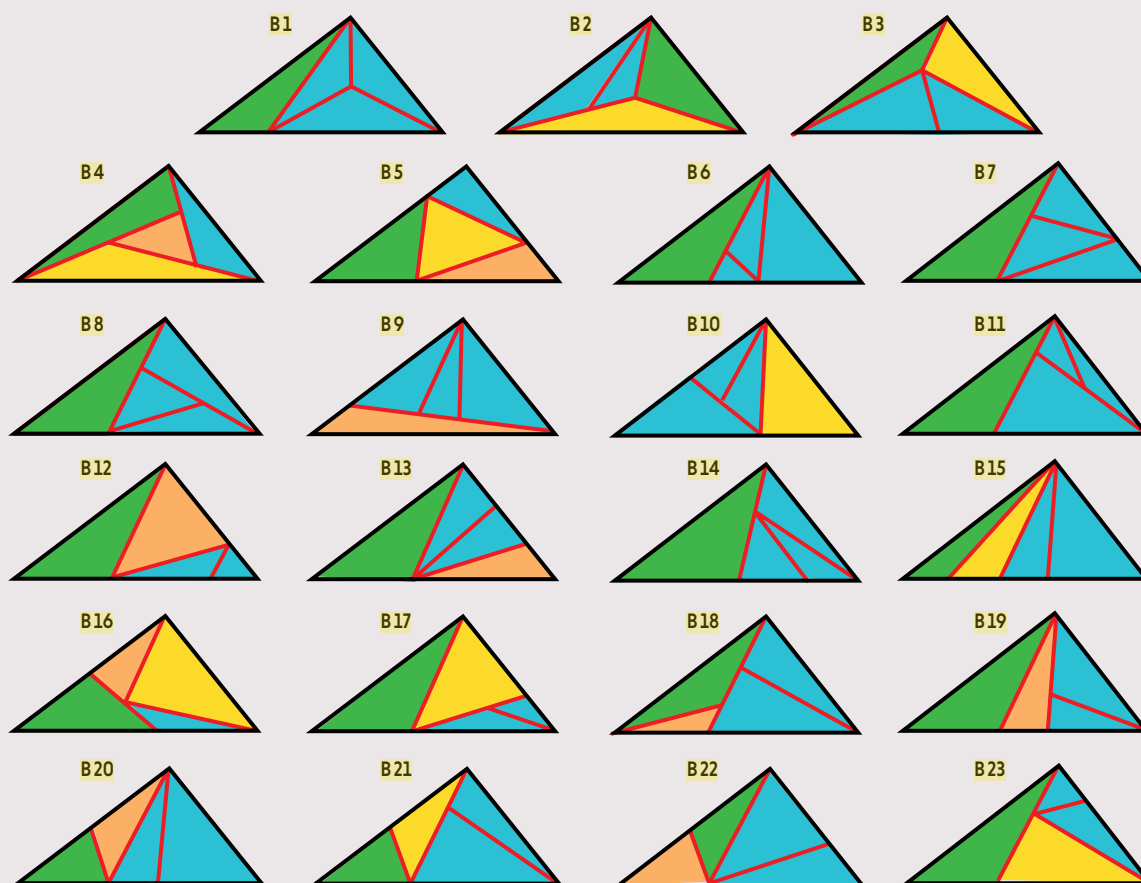
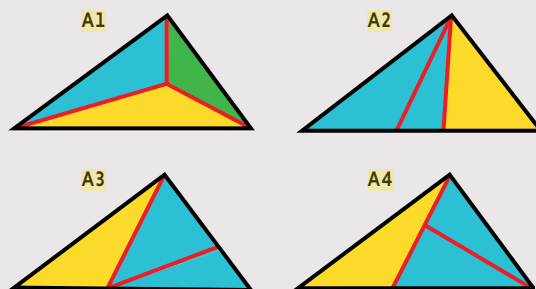
Le troisième découpage B₃ aura ainsi pour caractéristique {4}. Viennent ensuite {1+1/2, 1+1/2, 1+1/2} pour le triangle B₄, {} pour B₅ (il n'y a aucun point intérieur).



Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

DÉCOUPER UN TRIANGLE EN 3 OU 4 TRIANGLES

Sont dessinées ici les diverses façons de découper un triangle en 3 triangles (schémas A1 à A4) ou en 4 triangles (schémas B1 à B23). Si l'on interdit à un regroupement de triangles d'en former un, il reste une seule façon (le découpage A1) de découper un triangle en 3, et trois de le découper en 4 (les découpages B4, B5, B16). Les segments tracés en rouge délimitent les triangles du découpage ; les regroupements de triangles formant eux-mêmes un triangle sont en bleu (découpages « non premiers »).



Pour l'ensemble des découpages en 4 triangles, on a la liste de caractéristiques suivante: B1: {3}; B2: {3, 1+1/2}; B3: {4}; B4: {1+1/2, 1+1/2, 1+1/2}; B5: {}; B6: {1+1/2}; B7: {1+1/2}; B8: {1+1/2, 1+1/2}; B9: {1+1/2, 1+1/2}; B10: {1+1/2}; B11: {1+1/2, 1+1/2}; B12: {}; B13: {}; B14: {2+1/2}; B15: {}; B16: {2+1/2}; B17: {1+1/2}; B18: {1+1/2, 1+1/2}; B19: {1+1/2}; B20: {}; B21: {1+1/2}; B22: {}; B23: {2+1/2}.

Les dessins dont les caractéristiques sont différentes ne peuvent pas être égaux à une déformation topologique continue près, car de telles déformations ne changent pas les caractéristiques notées entre accolades telles que nous les avons définies. Il reste quelques cas à

considérer de plus près, car:

(A) les découpages B5, B12, B13, B15, B20, B22 sont tous du type {};

(B) les découpages B6, B7, B10, B17, B19, B21 sont tous du type {1+1/2};

(C) les découpages B8, B9, B11, B18 sont du type {1+1/2, 1+1/2};

(D) les découpages B14, B16 et B23 sont du type {2+1/2}.

Pour s'assurer que dans chacune de ces quatre catégories, il n'y a pas de découpages équivalents, on parcourt le périmètre de chaque triangle découpé en considérant successivement les trois sommets, puis les trois côtés, et l'on note le nombre de segments du >