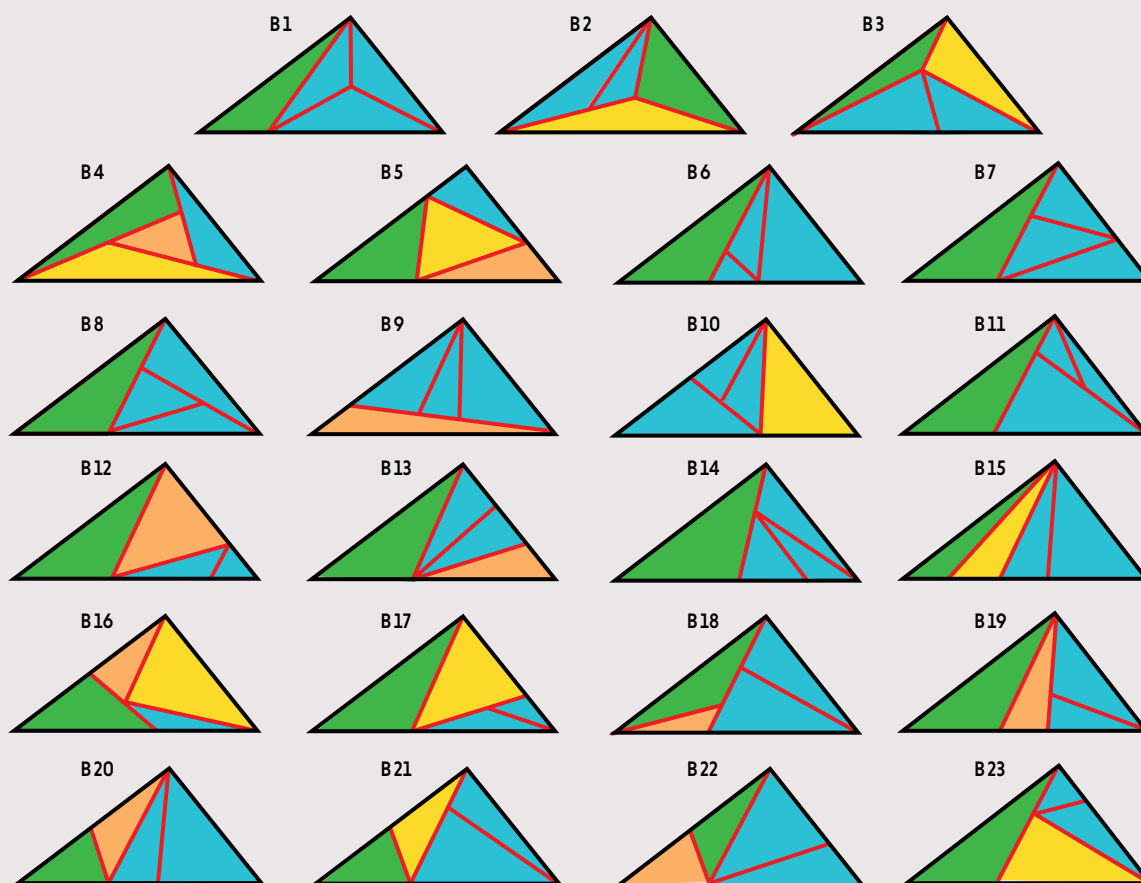
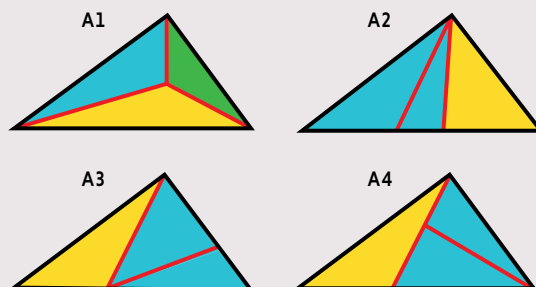


DÉCOUPER UN TRIANGLE EN 3 OU 4 TRIANGLES

1

Sont dessinées ici les diverses façons de découper un triangle en 3 triangles (schémas A1 à A4) ou en 4 triangles (schémas B1 à B23). Si l'on interdit à un regroupement de triangles d'en former un, il reste une seule façon (le découpage A1) de découper un triangle en 3, et trois de le découper en 4 (les découpages B4, B5, B16). Les segments tracés en rouge délimitent les triangles du découpage ; les regroupements de triangles formant eux-mêmes un triangle sont en bleu (découpages « non premiers »).



Pour l'ensemble des découpages en 4 triangles, on a la liste de caractéristiques suivante: B1: $\{3\}$; B2: $\{3, 1+1/2\}$; B3: $\{4\}$; B4: $\{1+1/2, 1+1/2, 1+1/2\}$; B5: $\{\}$; B6: $\{1+1/2\}$; B7: $\{1+1/2\}$; B8: $\{1+1/2, 1+1/2\}$; B9: $\{1+1/2, 1+1/2\}$; B10: $\{1+1/2\}$; B11: $\{1+1/2, 1+1/2\}$; B12: $\{\}$; B13: $\{\}$; B14: $\{2+1/2\}$; B15: $\{\}$; B16: $\{2+1/2\}$; B17: $\{1+1/2\}$; B18: $\{1+1/2, 1+1/2\}$; B19: $\{1+1/2\}$; B20: $\{\}$; B21: $\{1+1/2\}$; B22: $\{\}$; B23: $\{2+1/2\}$.

Les dessins dont les caractéristiques sont différentes ne peuvent pas être égaux à une déformation topologique continue près, car de telles déformations ne changent pas les caractéristiques notées entre accolades telles que nous les avons définies. Il reste quelques cas à

considérer de plus près, car:

- (A) les découpages B5, B12, B13, B15, B20, B22 sont tous du type $\{\}$;
- (B) les découpages B6, B7, B10, B17, B19, B21 sont tous du type $\{1+1/2\}$;
- (C) les découpages B8, B9, B11, B18 sont du type $\{1+1/2, 1+1/2\}$;
- (D) les découpages B14, B16 et B23 sont du type $\{2+1/2\}$.

Pour s'assurer que dans chacune de ces quatre catégories, il n'y a pas de découpages équivalents, on parcourt le périmètre de chaque triangle découpé en considérant successivement les trois sommets, puis les trois côtés, et l'on note le nombre de segments du

> découpage qui touchent l'élément en question en indiquant les regroupements. On sépare les trois nombres associés aux sommets des trois nombres associés aux côtés par un trait vertical. Si deux découpages sont identiques au sens topologique, alors ils auront les mêmes deux paquets de trois nombres (à l'ordre près des éléments dans chaque paquet). Pour le découpage B5, par exemple, on a $[0, 0, 0 \mid 2, 2, 2]$.

Pour les découpages (A), de type $\{ \}$, on a ainsi:

B5 $[0, 0, 0 \mid 2, 2, 2]$, B12 $[1, 0, 0 \mid 2, 1+2, 0]$, B13 $[1, 0, 0 \mid 1+1, 3, 0]$, B15 $[3, 0, 0 \mid 0, 1+1+1, 0]$, B20 $[2, 0, 0 \mid 0, 1+2, 1]$, B22 $[1, 0, 0 \mid 1, 3, 1]$.

Les crochets sont tous différents. On en déduit qu'il ne peut pas y avoir d'égalité entre les découpages de type $\{ \}$.

Les découpages (B), de type $\{1+1/2\}$, donnent: B6 $[2, 0, 0 \mid 0, 2+1, 0]$, B7 $[1, 0, 0 \mid 2, 2, 0]$, B10 $[2, 0, 0 \mid 0, 2, 1]$, B17 $[1, 1, 0 \mid 1, 1, 0]$, B19 $[2, 1, 0 \mid 0, 1+1, 0]$, B21 $[1, 1, 0 \mid 0, 2, 1]$.

Les découpages (C), du type $\{1+1/2, 1+1/2\}$: B8 $[1, 1, 0 \mid 0, 2, 0]$, B9 $[2, 1, 0 \mid 0, 0, 1]$, B11 $[2, 1, 0 \mid 0, 1, 0]$, B18 $[1, 1, 1 \mid 0, 1, 0]$. Les découpages B9 et B11 ayant les mêmes deux paquets de trois nombres, il faut les examiner plus attentivement. Ils diffèrent topologiquement, car les deux points intérieurs du découpage B9 sont sur un même segment, alors qu'ils sont sur deux segments différents dans le découpage B11.

Pour les découpages (D), de type $\{2+1/2\}$: B14 $[1, 1, 0 \mid 0, 1+1, 0]$, B16 $[1, 1, 0 \mid 0, 1, 1]$,

B23 $[1, 1, 0 \mid 1, 1, 0]$. Les découpages B16 et B23 sont bien différents: pour B16, jamais plus de deux extrémités des segments de découpage ne joignent un même côté du grand triangle, alors que pour B23, trois des extrémités de ces segments joignent le côté droit du triangle.

Ainsi, les dessins B1 à B23 de l'encadré 1 sont tous différents.

Que se passe-t-il pour les découpages en davantage de triangles? Aujourd'hui, on connaît 8 découpages premiers d'un triangle en 5 triangles, et 62 découpages premiers en 6 triangles. Mais on n'est certain ni que les listes connues soient complètes, ni qu'elles ne contiennent pas de découpages équivalents (voir www.mathpuzzle.com/triangle.html).

Un calcul de ces suites a été mené par Miroslav Vicher et a conduit au tableau suivant, qui attend confirmation (voir www.vicher.cz/puzzle/triangles/triangles.htm).

Nombre de triangles	Nombre de découpages	Nombre de découpages premiers
2	1	1
3	4	1
4	23	3
5	180	8
6	1806	62
7	20 198	535
8	227 120	4 213

2

PAVER UN TRIANGLE

Tout triangle peut être pavé par n^2 triangles semblables à lui-même et égaux (A).

Le triangle rectangle d'angles 30° , 60° et 90° se découpe en deux triangles semblables à lui-même mais de tailles différentes (B), en trois triangles semblables à lui-même et de même taille (C), et en quatre triangles semblables à lui-même et de même taille (D, E, F).

Un triangle rectangle T de côtés n et m peut être pavé par $n^2 + m^2$ triangles semblables à lui-même. Le triangle G correspond à $5 = 1^2 + 2^2$, le triangle H à $13 = 3^2 + 2^2$ et le triangle I à $74 = 5^2 + 7^2$.

